بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

معاونت دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

نهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ : ۹۲/۲/۱۲ – ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

شماره پرونده: ------
کد ملّی: ------
نام پدر: ------
نام مدرسه: ------

استان: ------
منطقه: ------
حوزه: ------
پایه تحصیلی: ------

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

کد ملی: ------

۱- معمولا در ماه مبارک رمضان بیشترین توجه به ساعات شرعی وجود دارد، و دیده می‌شود که ساعات شرعی هر شهر در روزهای مختلف در ساعات متفاوتی است. هم‌چنین ساعات شرعی شهرهای مختلف تفاوت‌هایی با هم دارند. برای سادگی از بیضوی بودن مدار زمین به دور خورشید صرف نظر می‌کنیم (فرض: در تهران همواره ظهر شرعی ساعت ۱۲:۰۰ باشد و از اثر آنالما صرف نظر کنیم). زاویه‌ی میل خورشید به صورت یک تابع سینوسی ساده به فرم زیر تغییر می‌کند: $D=A\sin(2\pi t/T)$ که T دوره تناوب سالانه (۳۶۵٫۲۵ روز)، t زمان سپری شده از لحظه‌ی تحویل سال، $A=۲۳٫۵^{\circ}$ و D میل خورشید است.

الف) امسال اولین روز ماه رمضان ۱۹ تیرماه است. طلوع آفتاب را برای شهر تهران ($۳۵٫۷^{\circ}N$ و $۵۱٫۴^{\circ}E$) در این تاریخ برحسب ساعت رسمی کشور محاسبه کنید.

ب) اگر اذان صبح زمانی باشد که خورشید تقریبا ۲۲ درجه زیر افق قرار گرفته است و همچنین زمان اذان مغرب زمانی باشد که خورشید تقریبا ۵ درجه به زیر افق می‌رود، طول روز روزه داران در ۱۹ تیر را حساب کنید.

ج) در شهر زنجان ($۳۵٫۷^{\circ}N$ و $۴۸٫۳^{\circ}E$) طلوع آفتاب در این روز چه ساعتی خواهد بود؟

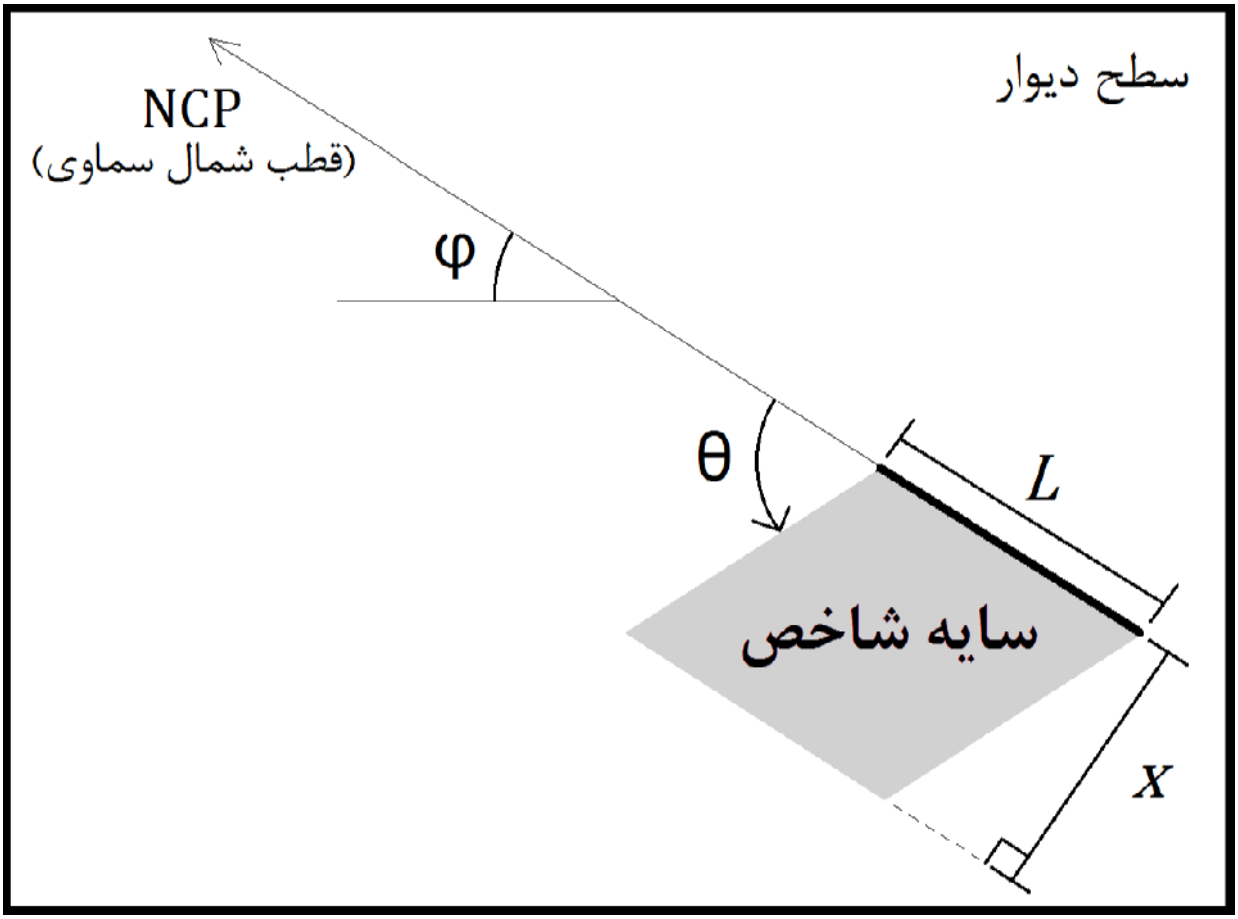
د) در شهر اصفهان ($۳۲٫۲^{\circ}N$ و $۵۱٫۴^{\circ}E$) طلوع آفتاب در این روز چه ساعتی خواهد بود؟

کد ملی: ------

۲- در شکل زیر یک نوعِ خاص از ساعت آفتابی را مشاهده می‌کنید. شاخص این ساعت آفتابی، مستطیلی به طول L و ارتفاع h می‌باشد که به طور عمود روی وجه غربیِ دیوارِ قائمی که در راستای شمال-جنوب کشیده شده است، قرار دارد. طول این مستطیل در راستای NCP (قطب شمال سماوی) و SCP (قطب جنوب سماوی) می‌باشد. شکل زیر وجه غربیِ دیوار را نشان می‌دهد، زاویه‌ی Φ عرض جغرافیایی مکانی است که ساعت آفتابی در آنجا نصب شده (که در شکل، Φ شمالی در نظر گرفته شده است) و X ارتفاعِ سایه‌ی متوازی الاضلاع شکل است.

الف) رابطه‌ای به دست آورید که از مقدارِ X بتوان زاویه‌ی ساعتی خورشید را محاسبه کرد.

ب)چنانچه این ساعت آفتابی در تهران ($\Phi=۳۵/۷^{\circ}$) به کار رود، بیشترین و کمترین مقدارِ زاویه‌ی θ را در روزی که میلِ خورشید $\delta=۲۱/۴^{\circ}$ است محاسبه کنید.



۳- اجرامی در کمربند کوییپر را در نظر بگیرید. این اجرام به موجب حرکت ظاهری خود در آسمان مشخص می‌شوند. این اجرام سرعت ظاهری زیادی نسبت به ستارگان دور دست و کهکشان‌ها در آسمان شب دارند، به طوری که در طول یک شب با یک تلسکوپ آماتوری این حرکت قابل تشخیص است.

حرکت ظاهری این اجرام دو عامل دارد: حرکت مداری این اجرام به دور خورشید و حرکت مداری زمین به دور خورشید. اثر اول را **حرکت خاصه** (*Proper Motion*) و اثر بعدی که ناشی از حرکت زمین است را **اختلاف منظر عِلّی** (*Causes Parallax*) می‌گویند.

در این مساله می‌خواهیم ببینیم که کدام یک از این دو اثر اهمیت بیشتری دارند

جرمی کوییپری را در نظر بگیرید که در فاصله ۴۰ واحد نجومی از خورشید قرار دارد و توسط زمین در حالت مقابله رصد می‌شود. فرض کنید هم این جرم و هم زمین در مدارهایی دایره‌ای به دور خورشید می‌چرخند و هر دو، جرم‌هایی کوچک نسبت به خورشید هستند.

الف) اگر از حرکت مداری زمین صرف‌نظر کنیم، حرکت خاصه‌ی این جرم کوییپری که از زمین دیده می‌شود چقدر خواهد بود؟ جواب را برحسب ثانیه‌ی قوسی بر ساعت بیان کنید.

ب) حال از حرکت خاصه‌ی این جرم کوییپری صرف‌نظر کنید و اثر دوران زمین (اختلاف منظر علّی) را برحسب ثانیه‌ی قوسی بر ساعت به دست آورید.

ج) رصدگری سعی کرده تا حرکت ظاهری این جرم کوییپری را در حالت تربیع بررسی کند. سرعت ظاهری در این حالت چقدر است؟

۴- سالها پیش منجمی که با فرض ثابت هابل ۵۰ کیلومتر بر ثانیه بر مگاپارسک به مطالعه کهکشان‌ها پرداخته بود، قدر مطلق و رنگ کهکشانی را به ترتیب $M_B=-21.5\ mag$ و $B-R=1.5$ گزارش کرده است. این منجم همچنین رابطه‌ی

$$Log\ L_x\ [erg/s] = (2.17\pm0.1)\ log\ (L_B/L_{B,sun}) + (18.0\pm1.1)$$

را بین تابندگی پرتوهای این نوع از کهکشان‌ها و تابندگی فیلتر B آنها (در واحد تابندگی B خورشید) گزارش کرده است.

اکنون منجمی با فرض ثابت هابل برابر ۷۰ کیلومتر برثانیه بر مگاپارسک بر روی همان کهکشان تحقیق می کند.

با فرض اینکه تابندگی باند R این کهکشان ۱۰ درصد در این مدت افزایش یافته باشد، تابندگی این کهکشان در باند R برحسب تابندگی خورشید در این باند چقدر است؟

شیب رابطه‌ی تابندگی پرتوهای ایکس برحسب تابندگی B این دسته از کهکشان‌ها از نظر این منجم چقدر خواهد بود؟

فرضیات: $M_{B,sun}=5.45$ و رنگ خورشید $(B-R)_{sun}=1.0$ است.

۵- فرض کنید فقط دو نوع ستاره‌ی x و y با جرم‌های $M_x=0.5$ و $M_y=5$ (برحسب جرم خورشیدی) در یک خوشه‌ی ستاره‌ای وجود دارند. همچنین فرض کنید رابطه‌ی جرم– درخشندگی در ستاره‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{L}{L_{sun}} = \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^3$$

الف) اگر نسبت جرم به درخشندگی این خوشه دو برابر نسبت جرم به درخشندگی خورشید باشد ($\frac{M}{L} = 2\frac{M_{sun}}{L_{sun}}$)، نسبت تعداد ستاره‌های نوع x به تعداد ستاره‌های نوع y را به دست آورید.

ب) نسبت درخشندگی ناشی از مجموع ستاره‌های نوع x به درخشندگی ناشی از مجموع ستاره‌های نوع y را به دست آورید.

ج) تابع جرم یک خوشه‌ی ستاره‌ای به این صورت تعریف می‌شود: $N(m) = Cm^{-\alpha}$، که در این رابطه $N(m)$ تعداد ستاره‌های با جرم m است، همچنین C و α مقادیری ثابت هستند. برای خوشه‌ی ستاره‌ای تعریف شده در بالا مقدار α را به دست آورید.

۶- انرژی پتانسیل گرانشی ذخیره شده در یک ساختار کروی به شعاع R و جرم M که به طور یکنواخت توزیع شده، برابر است با: $E_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$. تحت یک شرایط خاص دمایی، این امکان وجود دارد که این ساختار در اثر نیروی جاذبه‌ی گرانشی در خود آزادانه فرو برمبد. فرض کنید این ساختار از گازی کامل متشکل از مولکول‌های هیدروژن باشد.

الف) عبارتی برای چگالی جرمی این ساختار به دست آورید که به ازای مقادیر بیشتر از آن ساختار در خود فرو می‌رمبد. مقدار عددی چگالی آستانه را برای ساختاری با جرم خورشید و با دمای $T=20$ کلوین به دست آورید.

ب) فرض کنید یک ابر مولکولی به جرم خورشید که چگالی آن برابر با چگالی آستانه‌ای است که در قسمت «الف» به دست آمده است؛ شروع به رمبش آزاد می‌کند تا به یک پیش-ستاره‌ی رشته‌ی اصلی تبدیل شود. در حین رمبش، انرژی گرانشی آزاد شده صرف شکستن مولکول‌های هیدروژن و سپس یونیزه کردن آنها می‌شود. شعاع نهایی این ساختار را پس از یونیزه شدن کامل به دست آورید. انرژی یونیزاسیون هیدروژن $\varepsilon_{ionization} = 13.6\ eV$ و انرژی جداسازی اتم‌های مولکول هیدروژن $\varepsilon_{decomposition} = 4.5\ eV$ است. جرم اتم هیدروژن $m_H = 2\times10^{-27}\,kg$ است.

ج) در اواخر مرحله‌ی رمبش آزاد، به دلیل افزایش کدریت، انرژی آزاد شده‌ی گرانشی منجر به افزایش دما می‌شود. به عبارت دیگر رمبش از حالت آزاد تبدیل به انقباض آهسته می‌شود به طوری که می‌توان سیستم را تقریبا در حالت تعادل در نظر گرفت. با این فرض، دمای این ساختار را که شعاعش را در قسمت قبل به دست آورده‌اید؛ محاسبه کنید.

۷- قرص برافزایشی توده‌ای از گاز چرخان بسیار داغ است که سیاهچاله‌ها را احاطه کرده است. قسمت‌های داخلی قرص در این مساله مورد نظر است. فرض کنید ناحیه مورد نظر از R_{ISCO} تا $2R_{ISCO}$ امتداد داشته باشد.
(ISCO: innermost stable circular orbit)

در داخل این ناحیه($r<R_{ISCO}$)، گاز بسیار رقیق و تابش بسیار کمی از قرص خواهیم داشت. تابش اصلی قرص از ناحیه $R_{ISCO}<r<2R_{ISCO}$ می‌آید.

فرض کنید ناحیه مورد نظر تابش جسم سیاهی در دمای T داشته باشد. فرض کنید قرص زاویه‌ی انحراف i داشته باشد (نسبت به ناظر زمینی). فاصله قرص از زمین را هم d بگیرید. ناظر زمینی یک شار کلی از این قرص به اندازه‌ی F دریافت می کند (برحسب $erg/(s.cm^2)$).

الف) رابطه‌ای دقیق برای R_{ISCO} برحسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ب) بیشینه‌ی شار تابشی F_λ (شار در بازه‌ی λ و $\lambda + d\lambda$) در $\lambda_{max} = 2.9nm$ اتفاق می‌افتد. شار بولومتریک $F = \int_0^\infty F_\lambda \, d\lambda = 2 \times 10^{-12}$ $erg/(s.cm^2)$ است. از رصدهای دیگر نیز می‌دانیم $d=1kpc$ و $i = 80^o$ هستند. با این مقادیر R_{ISCO} را برحسب km به دست آورید.

ج) می‌دانیم جرم این سیاهچاله $M = 10M_\odot$ است. در نظریه‌های اخترفیزیکی در سیاهچاله‌های غیرچرخان $R_{ISCO} = 6R_G$ و در سیاهچاله‌های با بیشینه چرخش $R_{ISCO} = R_G$ است، که در آن $R_G = \frac{GM}{C^2}$ است. با استفاده از داده‌های قسمت «ب» چه نتیجه‌ای راجع به چرخش سیاهچاله می‌گیریم.

د) رابطه‌ای برای $\dot{M}$ برحسب R_{ISCO} ، M و T به دست آورید. مقدار $\dot{M}$ را در این سیستم برحسب $M_\odot/yr$ به دست آورید.

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

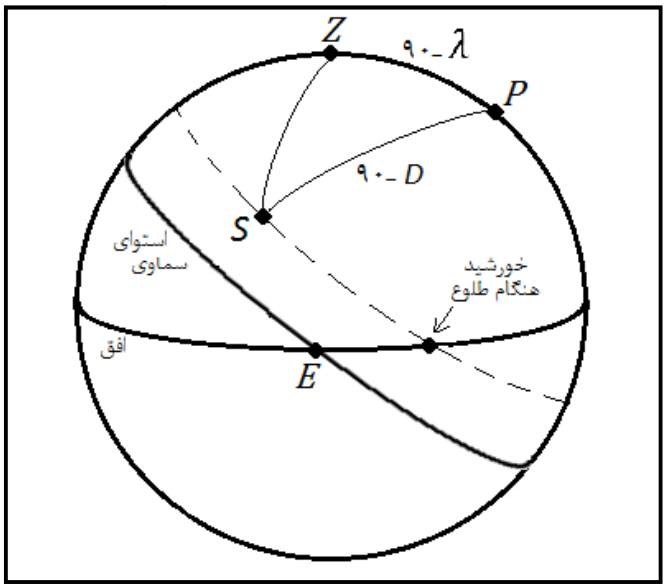
پاسخنامه‌ی تشریحی

آزمون مرحله‌ی دوم نهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

سوال اول : (ماه مبارک رمضان)

الف) در 19 تیرماه، 112 روز از اعتدال بهاری گذشته است. با توجه به رابطه‌ی داده شده میل خورشید بدست می آید.

$$D = A\sin\frac{2\pi t}{p} = 23.5 \times \sin\left(\frac{2\pi\times 112}{365.25}\right) = 22.0^\circ$$



از رابطه ی کسینوس ها برای مثلث کروی ZPS داریم :

$$\cos(ZS) = \sin\lambda\sin D + \cos\lambda\cos D\cos(Z\widehat{P}S)$$

در هنگام طلوع خورشید روی افق می باشد $(ZS = 90^\circ)$ در نتیجه:

$$\cos(Z\widehat{P}S) = -\tan\lambda\tan D \ , \ \lambda = 35.7^\circ \ \Rightarrow \ Z\widehat{P}S = 7^h 8^m$$

چون فرض شده است ظهر شرعی در ساعت 12 به زمان رسمی کشور است بنابر این می توان نوشت:

$$\text{زمان طلوع خورشید} = 12 - Z\widehat{P}S + 1 = \boxed{5^h 52^m}$$

ب) در هنگام اذان صبح $ZS_1 = 90° + 22° = 112°$ و در هنگام اذان مغرب $ZS_2 = 90° + 5° = 95°$ می باشد.

برای اذان صبح : $Z\widehat{P}S_1 = 9^h28^m$

برای اذان مغرب : $Z\widehat{P}S_2 = 7^h36^m$

طول روز روزه داران $= Z\widehat{P}S_1 + Z\widehat{P}S_1 = \boxed{17^h4^m}$

ج) عرض جغرافیایی شهر زنجان با تهران یکی است پس اختلاف زاویه فقط ناشی از طول جغرافیایی است که برابر است با $51.4° - 48.3° = 3.1°$ که معادل 12^m24^s است.

طلوع خورشید در زنجان $= 5^h52^m + 12^m = \boxed{6^h4^m}$

د) چون طول جغرافیایی شهر اصفهان با تهران یکی است پس اختلاف زاویه فقط ناشی از عرض جغرافیایی است که برابر است با $\Delta\lambda = 32.2° - 35.7° = -3.5°$. اختلاف زمان طلوع با تهران برابر اختلاف زاویه ی $Z\widehat{P}S$ در دو محل است.

روش اول: می توان $Z\widehat{P}S$ در هنگام طلوع خورشید رابرای اصفهان محاسبه کرد.

$$\cos(Z\widehat{P}S) = -\tan\lambda\tan D \ , \ \lambda = 32.2° \ \Rightarrow \ Z\widehat{P}S_{\text{اصفهان}} = 6^h59^m$$

$$\Delta(Z\widehat{P}S) = Z\widehat{P}S_{\text{اصفهان}} - Z\widehat{P}S_{\text{تهران}} = 6^h59^m - 7^h8^m = -9^m$$

روش دوم :

$$\Delta(Z\widehat{P}S) = \frac{\tan D\,(1+\tan^2\lambda)}{\sin(Z\widehat{P}S)}\,\Delta\lambda = \frac{\tan 22.0°\,(1+\tan^2 35.7°)}{\sin(107°)} = -2.2° \simeq -9^m$$

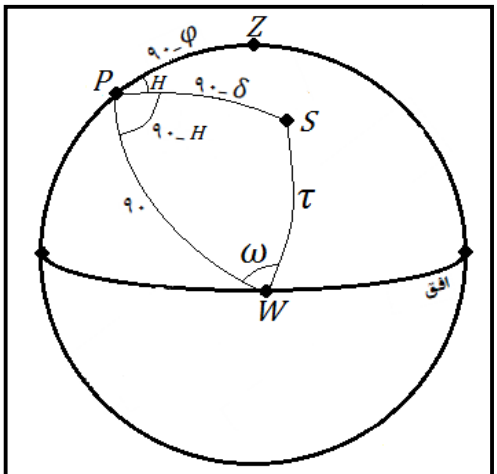
طلوع خورشید در اصفهان $= 5^h52^m - \Delta(Z\widehat{P}S) = \boxed{6^h1^m}$

سوال دوم : (ساعت آفتابی)

الف) همان طور که Z (سمت الرأس) قطب صفحه‌ی افق می‌باشد، W (نقطه‌ی غرب افق) نیز قطب صفحه‌ی دیوار می‌باشد. برای حل این سوال دو زاویه تعریف می‌کنیم که مشابه سمت وفاصله‌ی سمت الرأسی هستند، با این تفاوت که گویی افق را سطح دیوار در نظر گرفته‌ایم:

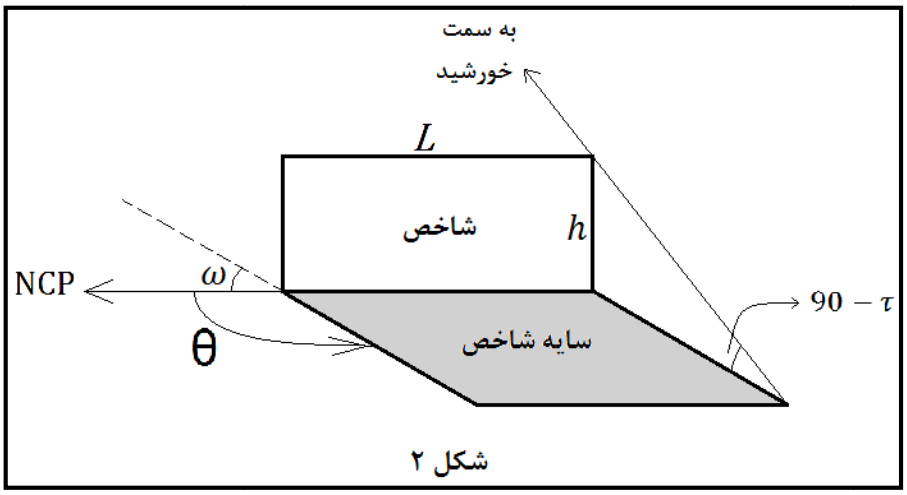
τ: فاصله‌ی زاویه‌ای بین خورشید و W

ω: زاویه‌ی کروی خورشید-P-W



شکل ۱

شکل 2 موقعیت شاخص و سایه‌ی آن را نشان می‌دهد.با توجه به این شکل، ارتفاع سایه‌ی متوازی الاضلاع شکل عبارت است از: $X = h\tan(\tau)\sin(\omega)$

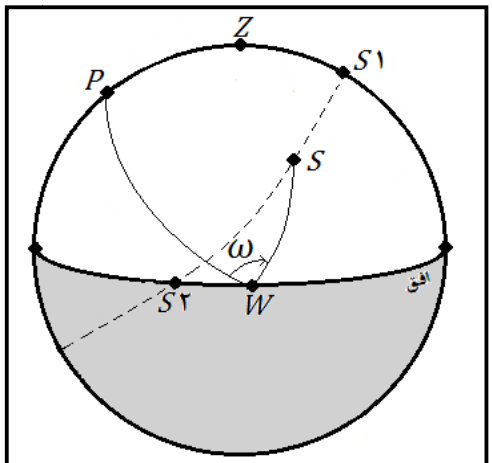


شکل ۲

با استفاده از فرمول چهارجزئی در مثلث کروی PWS (شکل 1) داریم:

$$\cos(\omega)\cos(90°) = \sin(90°)\cot(\tau) - \sin(\omega)\cot(90° - H)$$
$$\Rightarrow \tan(\tau)\sin(\omega) = \cot(H) \Rightarrow \boxed{X = h\cot(H)}$$

ب) با توجه به شکل 2، رابطه‌ی بین θ و ω عبارت است از: $\theta = 180° - \omega$. بنابرین بیشترین و کمترین مقدار زاویه‌ی θ را می‌توان با بررسی تغییرات ω به دست آورد. در شکل زیر مسیر خورشید به صورت خط‌چین مشخص شده، و مکان خورشید در یک لحظه‌ی دلخواه در آسمان (S)نشان داده شده است. واضح است که بیشترین مقدار ω مربوط به زمانی است که خورشید در حال عبور بالایی است (S1) و کمترین مقدار ω مربوط به زمانی است که خورشید غروب می‌کند(S2).توجه کنید که این ساعت آفتابی فقط در این بازه‌ی زمانی قابل استفاده است.



شکل ۳

از آنجایی که W قطب دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از نقاط P و Z است، داریم:

$$\omega_{max} = \widehat{PS_1} = 90° - \delta = 68.6° \quad \Rightarrow \theta_{min} = 180° - \omega_{max} \Rightarrow \boxed{\theta_{min} = 111.4°}$$

$$\omega_{min} = -\widehat{PS_2} = -\varphi = -35.7° \quad \Rightarrow \theta_{max} = 180° - \omega_{min} \quad \Rightarrow \boxed{\theta_{max} = 215.7°}$$

توجه: مطمئناً این راه حل، تنها راه حل سوال نمی‌باشد و روش‌های مختلفی وجود دارد که به جواب صحیح ختم می‌شوند.

سوال سوم : (کمربند کوییپر)

الف) اگر از حرکت زمین صرفنظر کنیم ، حرکت ظاهری KBO ناشی از دوران KBO خواهد بود :

$$\frac{G\,M_\odot\,m}{R^2} = \frac{m\,V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G\,M_\odot}{R}}$$

با دانستن اینکه فاصله ی KBO از زمین برابر $R = 39\ (AU)$ است.

$$1\ \ Au = 150 \times 10^{11}(Cm) = 1.5 \times 10^{11}(m) = 150 \times 10^9\ \ (m)$$

$$1\ yr = 365.25 \times 24 \times 3600\ (s) = 3.15 \times 10^7(s)$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \ (\frac{N\ m^2}{kg^2}), \quad M_\odot \cong 2 \times 10^{30}\ \ (kg)$$

$$R = 39 \times 150 \times 10^9\ \ (m)$$

$$V = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11}\ \ \times 2 \times 10^{30}}{39 \times 150 \times 10^9}} = 0.04775 \times 10^5 \left(\frac{m}{s}\right) = 4.7 \times 10^5 \left(\frac{Cm}{s}\right)$$

$$V = 4.7 \times 10^5 \left(\frac{Cm}{s}\right) \times \frac{3.156 \times 10^7 \left(\frac{s}{yr}\right)}{=\ \ 150 \times 10^{11} \left(\frac{Cm}{AU}\right)} = 0.098 \times 10^1 = 0.98\ (\frac{AU}{yr})$$

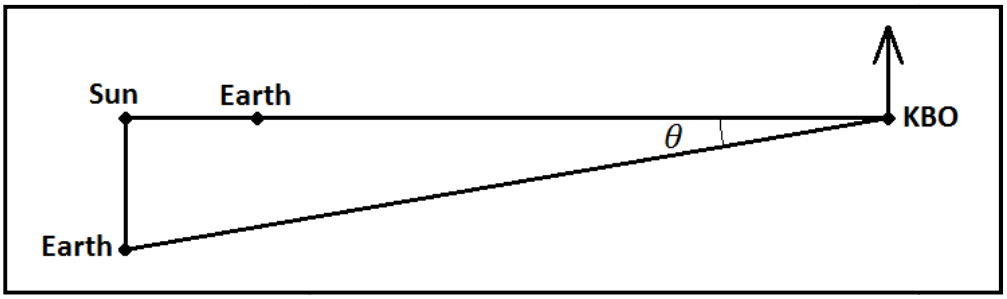
$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{4.72 \times 10^5 \left(\frac{Cm}{s}\right)}{39 \times 150 \times 10^{11}(Cm)} \times \frac{3600\ (s)}{1\ (hr)} = 2.89 \times 10^{-6} \left(\frac{rad}{hr}\right) = 0.59615\ \ arcsec.hr^{-1}$$

اگر به جای $R = 40\ (Au)$ قرار دهیم:

$$V = 0.04715 \times 10^5 \left(\frac{m}{s}\right) = 0.099\ (\frac{AU}{yr}) \omega = 2.9 \times 10^{-6} \left(\frac{rad}{hr}\right)$$

$$\boxed{\omega = 0.598485\ \ arcsec.hr^{-1}}$$

ب) اکنون از حرکت KBO صرفنظر می کنیم :



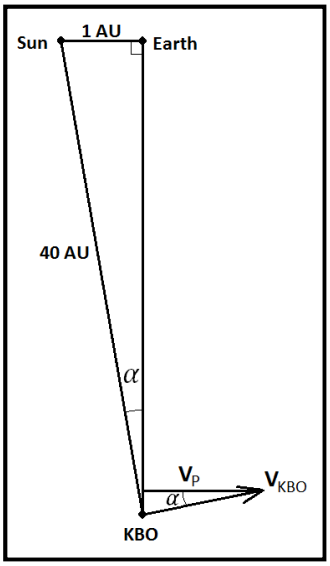
$$\tan(\theta) \cong \theta = \frac{1\ (\mathrm{Au})}{40(\mathrm{Au})} = 0.0256\ (\mathrm{rad})$$

یعنی هر $\frac{1}{4}$ سال حدود 0.0256 رادیان حرکت پارالاکسی ناشی از دوران زمین خواهیم دید (برای KBO)

$$\omega = \frac{0.0256\ (\mathrm{rad})}{0.25\ (\mathrm{yr})} \times \frac{206265''}{1\ \mathrm{rad}} \times \frac{1\ (\mathrm{yr})}{365\ (\mathrm{days})} \times \frac{1\ (\mathrm{day})}{24\ (\mathrm{h})}$$

$$\boxed{\omega = 2.40948\ \ \mathrm{arcsec.hr^{-1}}}$$

بنابراین حرکت پارالاکسی مهمتر از حرکت دورانی KBO است.



ج) در حالت تربیع زاویه ی خورشید – زمین – KBO قائمه است ، یعنی در این حالت سرعت زمین کاملاً در راستای KBO است و معنی آن این است که سرعت ناشی از پارالاکس در حالت تربیع هیچ نقشی ندارد. بنابراین حرکت ظاهری (appearent) فقط ناشی از proper motion می باشد.

V_{KBO} سرعت مداری حرکت KBO است.

سرعت KBO در راستای دید ما مولّفه ای دارد. مولّفه ای هم عمود بر راستای دید دارد. در اینجا مجهول مسئله V_p است، سرعتی که راصد در حالت تربیع به عنوان حرکت ظاهری اندازه گیری می کند.

چون α کوچک است: $\cos(\alpha) \cong 1 \quad \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{V_p}{V_{KBo}} = 0.999687$

$$\boxed{\omega = 0.58\ \ \mathrm{arcsec.hr^{-1}}}$$

سوال چهارم : (تابندگی کهکشان)

فاصله تابندگی (Luminosity distance) که بر اساس آن قدر مطلق کهکشانها در این فواصل بدست می آید متناسب با عکس ثابت هابل است. $d_L \propto \frac{cz}{H_0}$

مدول فاصله برابر است با: $\mu = m - M = 5\log d_L - 5$

با توجه به اینکه قدر ظاهری از نگاه دو منجم تغییری نمی کند اختلاف در قدر مطلق با فرض ثابت هابل 70 و 50 کیلومتر بر ثانیه بر مگاپارسک برابر خواهد بود با: $M_{70} = M_{50} + 5\log(\frac{70}{50})$

قدر $B = -21.5$ و رنگ $B - R = 1.5$ است پس قدر مطلق در باند R از نگاه منجم اول $M_{R,50} = -23$ است. قدر مطلق خورشید در این باند 4.45 خواهد بود چون رنگ خورشید 1.00 داده شده است و در نتیجه :

$$M_{R,70} = -23.0 + 0.73$$

$$\log\frac{L_{R,70}}{L_{R\odot}} = -\frac{M_{R,70} - M_\odot}{2.5}$$

$$\frac{L_{R,70}}{L_{R\odot}} = 10^{11.27} \times 1.1$$

که در آن افزایش تابندگی 10 درصدی با ضریب 1.1 منظور شده است و مقدار نهایی برابر است با:

$$\boxed{\frac{L_{R,70}}{L_{R\odot}} = 2.05 \times 10^{11}}$$

شیب رابطه بین تابندگی ایکس و باند B تغییری نمی کند چون ضریب مربوط به تغییر ثابت هابل برای باند ایکس و مرئی یکسان است.

سوال پنجم : (خوشه ی ستاره ای)

الف) $M_x = 0.5\, M_{sun} \Rightarrow L_x = \frac{1}{8} L_{sun}$

$$M_y = 5M_{sun} \Rightarrow L_y = 125L_{sun}$$

$$\frac{M}{L} = \frac{N_xM_x + N_yM_y}{N_xL_{x+}N_yL_y} = \frac{\frac{N_x}{2} + 5N_y}{\frac{N_x}{8} + 125N_y} = 2 \Rightarrow \frac{N_x}{N_y} \rightarrow \sim 1000$$

ب)
$$\frac{L_x^{total}}{L_y^{total}} = \frac{L_x N_x}{L_y N_y} = \frac{\frac{1}{8}}{125} \times 1000 = 1$$

ج)
$$N_x = CM_x^{-\alpha}\ , N_y = CM_y^{-\alpha} \Rightarrow \frac{N_x}{N_y} = (\frac{m_x}{m_y})^{-\alpha} = 1000 \Rightarrow (\frac{1}{10})^{-\alpha} = 1000 \Rightarrow \alpha = 3$$

سوال ششم : (ساختار کروی)

الف)
$$E_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\ , E_{KE} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{M}{m}kT$$

m جرم متوسط ذرات است. شرط رمبش:

$$|E_g| > E_{KE} \Rightarrow \frac{3}{5}G\frac{M^2}{R} > \frac{3}{2}\frac{M}{m}kT \Rightarrow \frac{1}{5}G\frac{M}{R} > \frac{1}{2}\frac{kT}{m} \Rightarrow R < \frac{2GMm}{5kT} \Rightarrow \frac{3M}{4\pi\rho} < (\frac{2GMm}{5kT})^3 \Rightarrow$$

$$\rho_c > \frac{3}{4\pi M^2}(\frac{5kT}{2Gm})^3$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\ , m = 2m_H = 2(1.67 \times 10^{-27}) = 2.34 \times 10^{-27}kg\ , G = 6.67 \times 10^{-11}$$

$$\boxed{\rho_c \approx 5 \times 10^{-15}kgm^{-3}}$$

ب)
$$\frac{M}{2m_H}\epsilon_{decomposition} + \frac{M}{m_H}\epsilon_{ionization} = \frac{3}{5}(\frac{GM^2}{R_2} - \frac{GM^2}{R_1})$$

مقدار R_1 را می‌توان از قسمت الف برآورد کرد:

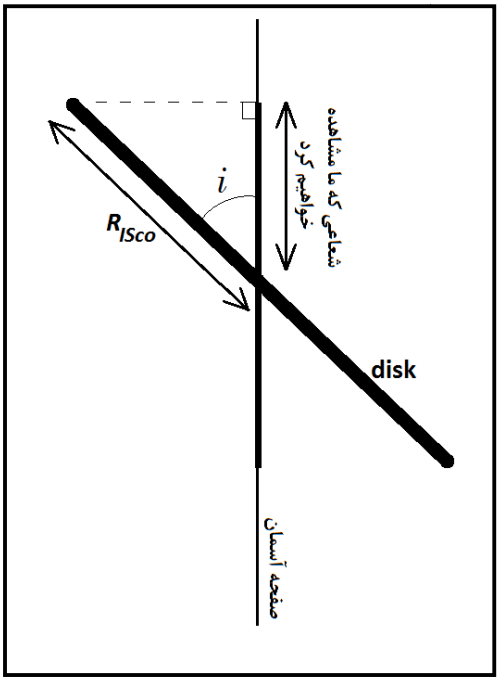
$$R_1^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho_c} \Rightarrow R_1 \sim 10^{-4}pc \gg R_2$$

$$2 \times 10^{39}J \cong \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_2} \Rightarrow \boxed{R_2 \cong 8 \times 10^{10}m = 2 \times 10^{-6}pc}$$

ج) در حالت تعادل هیدرواستاتیک داریم:
$$E_g - 2E_{KE} = 0$$

$$E_g = -2 \times 10^{39}J\ , \qquad E_{KE} = \frac{3}{2}N'kT - 12\frac{N}{2}kT = 3\frac{M}{m_H}kT \Rightarrow \boxed{T = 20000K}$$

سوال هفتم : (قرص برافزایشی)



الف) فرض کنید مسیر ذرات قرص بطور ذاتی دایره ای باشد. اگر قرص نسبت به صفحه ی آسمان انحراف داشته باشد . قرص شبیه بیضی دیده می شود.

با توجّه به شکل خواهیم دید شعاع دیده شدن به مقدار $R_{ISco}\ \cos(i)$ کاهش می یابد. شار دریافتی روی زمین به صورت زیر است:

$$F = \frac{\text{Luminosity}}{4\,\pi\,d^2} = \frac{1}{2}\frac{2\,\sigma\,T^4(\text{Area})}{4\,\pi\,d^2}$$

مساحت ناحیه ی مورد نظر:

$$\text{Area} = 4\,\pi\,R_{ISco}^2\,\cos(i) - \pi\,R_{ISco}^2\cos(i)$$

تقسیم بر دو به خاطر این است که ناظر زمینی فقط یک طرف قرص را می بیند .

$$F = \frac{3\,\sigma\,T^4 R_{ISco}^2\cos\ (i)}{4\,d^2}$$

$$R_{ISco} = \left(\frac{4\,Fd^2}{3\sigma\,T^4\cos\ (i)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma = 5.67\ \times\ 10^{-8}\left(\frac{W}{m^2K^4}\right) = 5.67\ \times\ 10^{-5}\left(\frac{erg}{cm^2K^4}\right)$$

$$1\ Pc = 3.085 \times 10^{16}(m) = 3.085 \times 10^{18}(cm)$$

$$d = 1\ (kPc)$$

$$R_{ISco} = \frac{2d}{T^2\ \cos(i)}\sqrt{\frac{F}{3\sigma}}$$

ب) می دانیم قانون جابجایی ویلهلم وین چنین است:

$$h\,\nu_{peak} = 5\,k_b\,T$$

$$T = \frac{hc}{5\,k_b\lambda_{rmpeak}} \qquad \Longrightarrow \qquad T = 994002^{\circ}K = 9.94 \times 10^{5\ \circ}\ K$$

$$k_b = 1.38\ \times\ 10^{-23}\left(\frac{J}{K}\right)$$

$\lambda_{rmpeak} = 2.9\ (nm)$

$h = 6.626 \times 10^{-34} (J\ s)$

$$T = \frac{6.626\times10^{-34} \times3\times10^{8}}{5\times1.38 \times 10^{-23}\times2.9\times10^{-9}} = 9.9 \times 10^{5} \quad {}^{\circ}K$$

اگر همه ی این اعداد را در رابطه ی R_{ISco} بگذاریم خواهیم داشت : $R_{ISco} = 15.8\ km$

$$R_{ISco} = \frac{2\times3.085\times10^{19}}{(9.9\times10^{5})^{2} \times\cos(80)} \times \sqrt{\frac{2\times10^{-12}}{3\times5.67\times10^{-8}}}$$

$$\boxed{R_{ISco} = 15.8\ (Km)}$$

ج) برای این سیاهچاله $R_G = \frac{G\,M}{c^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \ (\frac{N\ m^2}{kg^2})\times2 \times 10^{31}\ (kg)}{(3\times10^{8}(\frac{m}{s}))^2} = 14.82 \times 10^{3}(m) = 14.82(km)$

است و $R_{ISco} = 15.8\ (Km)$ و $\frac{R_{ISco}}{R_G} = \frac{15.8}{14.82} = 1.07$ و درنتیجه $\boxed{R_{ISco} = 1.07R_G}$

به نظر می رسد که در این سیستم سیاهچاله اسپین نزدیک به ماکزیمم مقدار را دارا است .

د) می دانیم که $L = \frac{G\,M\,\dot{M}}{2\,R_{ISco}}$ و در ضمن $L = 2\sigma T^4\ (3\,\pi\ R_{ISco}^2)$ از تساوی این دو رابطه خواهیم داشت:

$$2\sigma T^4(3\,\pi\ R_{ISco}^2) = \frac{G\,M\,\dot{M}}{2\,R_{ISco}} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{M} = \frac{12\,\pi\,\sigma\,T^4 R_{ISco}^3}{G\,M}$$

$$\dot{M} = \frac{12\times3.14\times5.67\times10^{-8}\times(9.993\times10^{5})^{4}\times(15.8\times10^{3})^{3}}{6.67 \times 10^{-11} \ \times2\times10^{31}} (\frac{kg}{s})$$

$$1\frac{kg}{s} = \frac{365.25\times24\times3600}{2\times10^{30}}\left(\frac{M_\odot}{yr}\right) = \frac{3.15\times10^{7}}{2\times10^{30}}\left(\frac{M_\odot}{yr}\right) = 1.57 \times 10^{-23}\left(\frac{M_\odot}{yr}\right)$$

$$\boxed{\dot{M} = 9.7\ \times 10^{-14}\left(\frac{M_\odot}{yr}\right)}$$