

# سوالات و پاسخ

## مرحله دوم

### سومین المپیاد

#### نجوم و اخترفیزیک

É - . Zìy » z † ZÁŠ È Y € È Á

: ½ Á » ǎM α Y € ~ e

: | Ì È ZÁ » mZS e è « z Ä d † YÁ ¼ CE, È Y Á Y € - ³ Z Y € ( Y d | H SÉÁÁ » ¼ M “  
 . d † Y Y Z † ½ M « Á Y R ¼ Á ¾ • È MÓ † { R † 1 e  
 . | Ì ^ È È Á Y q Á Ê ³ { Y Á Z Á Z V Á È » Á { Z Y Á Á † È Š j á ³ € È Á € Z  
 . | Ì ^ È È Á • z CE » Z Z d » Ö Y Á Ó Y | R † Á È Á » Z Á z Ö Z Z | a y € È † 3  
 . | È Z ¼ Z M Á Á ce u Ö Z Á M Y Á Á q » Á X Z | e • Á Y { ¿ € f † { Y † Á È Á » Z Á Á • È Z S ¿ 4 »  
 . d † Y Z q | » Z È , È Á » ¾ È È È † | Á Z È » ¾ Ì < Z Á { Z - 5 f † Y  
 . d ^ Ì z Z q | » Á Á Z | ° € Á Z - Á Z ¿ Z Z Á M, È » È Á Á Á | n Á { Z - 6 f † Y  
 . | Ì Á q È Á Á • e Á X Á ¾ Á • Á Á q ^ Y ½ M - Á È † Á ^ v » , z ( e / < Á Z Á Á » Á Y € ¾ Á / e f < Á Y È Á Á Z M Á Á  
 . | < | Á Y 1 Á Ö Y Á Z Y { € y Y { ¾ Á Á ¾ • È Z Z f ¿

. d † Y ¿ D ½ Y • Š ¿ M { ¼ † Y † Š È Y È S Y € † Š Á m Á S Z È ¼ Á Z | Á È Ö Y ¾ È Y j ° e

É - . Zìy » z † ZÁŠ È Y € È Á

فهرست نمادها و واحدها

$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	$G$
$3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور	$c$
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک	$pc$
$1.5 \times 10^{11} \text{ m}$	واحد نجومی	$Au$
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	سال نوری	$Ly$
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید	$R_{\odot}$
$6.38 \times 10^6 \text{ m}$	شعاع زمین	$R_{\oplus}$
$1.74 \times 10^6 \text{ m}$	شعاع ماه	
$3.84 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع مداری ماه	
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین	$M_{\oplus}$
5777K	دمای خورشید	$T_{\odot}$
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید	$L_{\odot}$
$1.37 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$	ثابت خورشیدی	
$2.6 \times 10^{-8}$	قدر ظاهری خورشید	$m_{\odot}$
$70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	ثابت هابل	$H_0$

Downloaded from: www.icosmo.ir

(1) گروه سنی زیر 17 سال مشاهده‌ی مستقیم سیاره‌های فراخورشیدی در صورتی امکان‌پذیر است که تلسکوپ نه تنها قادر به تفکیک زاویه‌ای سیاره از ستاره‌اش باشد، بلکه نوری که از سیاره دریافت می‌شود در زمینه‌ی نور ستاره، قابل رؤیت باشد. نور هر ستاره بر آشکارساز تلسکوپ به صورت لکه‌ای ظاهر می‌شود که شدت آن از رابطه‌ی

$$I_s(\phi) = I_0 e^{-D\phi/4\lambda}$$

تبعیت می‌کند که در این رابطه  $D$  قطر دهانه‌ی تلسکوپ،  $\lambda$  طول موج رصد شده توسط تلسکوپ و  $\phi$  جدایی زاویه‌ای از ستاره‌ی مرکزی است و  $e = 2/72$  عدد ثابت نپیر است. فرض کنید شرط رؤیت سیاره‌ای که در جدایی زاویه‌ای  $\phi$  از ستاره‌ی خود قرار دارد، در طول موج  $\lambda$ ،  $I_p \geq 2I_s(\phi)$  باشد که در آن  $I_p$  شدت نور سیاره است.

از این ستاره هم‌زمان به کمک دو تلسکوپ با قطر دهانه‌های  $D_1$  و  $D_2$  عکس برداری شده است. در تلسکوپ اول در طول موج  $\lambda_1 = 800 \text{ nm}$  نسبت شدت نور سیاره به  $I_0$ ،  $10^6$  و در تلسکوپ دوم در طول موج  $\lambda_2 = 5000 \text{ nm}$  نسبت شدت نور ستاره به  $I_0$ ،  $10^4$  بوده است. نسبت  $D_2$  به  $D_1$  چقدر باشد که در هر دو تلسکوپ سیاره در آستانه‌ی رؤیت باشد.

(1) گروه سنی زیر 15 سال توسط تلسکوپی با دهانه‌ی 20 سانتی‌متر و فاصله‌ی کانونی 150 سانتی‌متر، از ماه عکسی با زمان نوردهی 15/0 ثانیه گرفته‌ایم.

الف) زمان نوردهی لازم برای تلسکوپی با دهانه‌ی 15 سانتی‌متر و فاصله کانونی 200 سانتی‌متر، برای تهیه‌ی عکسی یکسان با عکس فوق چقدر است؟

ب) اندازه‌ی تصویر ماه در صفحه‌ی کانونی هر تلسکوپ چقدر است؟

ج) هر دو تلسکوپ، جهت مشاهده‌ی ماه، با عدسی چشی به فاصله کانونی 25 میلی‌متر به کار می‌روند. بزرگنمایی این تلسکوپ‌ها چقدر خواهد بود؟

(2) گروه سنی زیر 15 و 17 سال یکی از ابزارهایی که فضانوردان آپولو 11 که به ماه سفر کردند روی سطح این

قمر کار گذاشتند، آینه‌ی مربع شکلی بود به ابعاد 70 سانتی‌متر. این آینه از حدود 100 تکه‌ی کوچک‌تر ساخته شده بود. هر کدام از این آینه‌ها به شکلی طراحی شده بودند که نور را در همان راستایی که به آن‌ها می‌تابند باز می‌تابانند. این آینه روی پایه‌ای نصب شده بود که به کمک آن فضانوردان آینه را به سمت زمین تنظیم کردند. به کمک این آینه‌ها اخترشناسان می‌توانند فاصله‌ی زمین تا ماه را با دقت سانتی‌متر اندازه‌گیری کنند. برای این کار از روی زمین با لیزر به سمت آینه‌ها نور می‌تابانند و زمان رفت و برگشت نور را اندازه‌گیری می‌کنند و از روی آن فاصله را به دست می‌آورند. به کمک اطلاعات بسیار دقیقی که از این طریق به دست می‌آید می‌توان آهنگ دور شدن ماه از زمین و بعضی از حرکات پوسته‌ی زمین را بررسی کرد.

رصدخانه‌ی مک دونالد در ایالت تگزاس آمریکا به طور مداوم به کمک این آینه‌ها فاصله‌ی ماه را اندازه‌گیری می‌کند. منجمان در رصدخانه‌ی مک دونالد برای اندازه‌گیری فاصله از یک لیزر قوی و یک تلسکوپ 30 اینچی استفاده می‌کنند. هرچند که لیزر، نور متمرکز تولید می‌کند اما به خاطر پراش نور و اثرات جوی، قطر باریکه‌ی نور هنگامی که به سطح ماه می‌رسد در حدود 7 کیلومتر

می‌شود. حساب کنید که توان لیزر ( $P$ )، چقدر باید باشد تا نور بازتابیده از آینه‌ها درون چشمی تلسکوپ با چشم قابل مشاهده باشد. از جذب نور در جو زمین صرف نظر کنید و آینه‌ها را بازتابنده کامل در نظر بگیرید.

**(3) گروه سنی زیر 15 و 17 سال** دنباله‌داری در مداری بیضی شکل با نیم‌قطر بزرگ برابر با یک واحد نجومی و خروج از مرکز  $e$ ، در صفحه‌ی دایره‌البروج به دور خورشید می‌گردد. نسبت زمانی که دنباله‌دار درون مدار زمین است به زمانی که خارج مدار زمین است را حساب کنید. مدار زمین را دایره فرض کنید.

**(4) گروه سنی زیر 15 و 17 سال** ماهواره‌ای که همواره بر فراز استوای زمین در حال حرکت است، توسط ناظری در عرض جغرافیایی 30 درجه جنوبی مشاهده می‌شود. اگر شعاع مدار این ماهواره 3 برابر شعاع زمین باشد، حداکثر میل آن از دید ناظر چقدر است؟

**(5) گروه سنی زیر 17 سال** یک شرکت بین‌المللی پستی می‌خواهد از نیروی گرانش برای انتقال بسته‌های پستی بین شهرهای مهم جهان استفاده کند. برای این کار این شرکت در نظر دارد در امتداد وتری که شهرهای بزرگ را به هم وصل می‌کند تونلی حفر کند و بسته‌های پستی را از درون این تونل‌ها به کمک نیروی گرانش ارسال کند. زمان لازم  $T$  برای انتقال یک بسته‌ی پستی بین دو شهر با طول و عرض جغرافیایی  $\phi_1, \lambda_1$  و  $\phi_2, \lambda_2$  چقدر می‌شود؟ از اصطکاک بسته‌ها با دیواره تونل صرف‌نظر کنید.

**(5) گروه سنی زیر 15 سال** ناظری در نقطه‌ای با طول و عرض جغرافیایی (00) ایستاده است و با دست به سوی نقطه‌ای روی زمین اشاره می‌کند، به طوری که سمت و ارتفاع امتداد دست وی به ترتیب  $A$  و  $a$  است ( $a < 0$ ). اگر بتوانیم در امتداد دست این فرد تونلی مستقیم حفر کنیم، دهانه‌ی دیگر تونل در چه طول و عرض جغرافیایی (به ترتیب  $l$  و  $\phi$ ) قرار می‌گیرد؟

**(6) گروه سنی زیر 15 و 17 سال** تلسکوپ یک رصدخانه در عرض جغرافیایی 34 درجه‌ی شمالی، ستاره‌ای را در میل 36- درجه دنبال می‌کند. ابزارهای الکترونیکی رصدخانه، هم‌زمان محور اپتیکی تلسکوپ را بر روی ستاره و دهانه‌ی تلسکوپ را در مرکز شکاف گنبد تنظیم می‌کنند. به علت عوارض زمینی حداقل زاویه‌ای که بالاتر از افق دیده می‌شود 10 درجه است. با فرض این که طلوع و غروب ستاره در یک شب رخ دهند، در طول مدتی که ستاره در تلسکوپ قابل رؤیت است، گنبد چه زاویه‌ای ( $\theta$ ) را طی می‌کند؟

**(7) گروه سنی زیر 15 و 17 سال** فرض می‌کنیم سیاره‌ای روی دایره‌ای به شعاع  $a$  به دور خورشید می‌گردد. در یک لحظه جرم خورشید ناگهان دو برابر می‌شود. نیم‌محور بزرگ مدار جدید ( $a'$ ) و خروج از مرکز ( $e$ ) را به دست آورید.

1) گروه سنی زیر 17 سال جدایی زاویه‌ای سیاره و ستاره برای هر دو طول موج مقداری ثابت است؛ پس برای

آن که سیاره در هر دو طول موج قابل رؤیت باشد، باید در هر دو طول موج داشته باشیم  $I_p = 2I_s(\phi)$  یا به عبارت دیگر:

$$I_p = 2I_o e^{-D\phi/4\lambda} \Rightarrow I_p(\lambda) = 2I_o(\lambda) e^{-D\phi/4\lambda}$$

حال دو مقدار متفاوت طول موج را در این معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\lambda_1 = 800m \Rightarrow I_p(\lambda_1) = 2I_o(\lambda_1) e^{-D\phi/4\lambda_1} ; \quad \lambda_2 = 5000m \Rightarrow I_p(\lambda_2) = 2I_o(\lambda_2) e^{-D\phi/4\lambda_2}$$

اما با توجه به داده‌های موجود در صورت مسأله داشتیم:

$$\frac{I_p(\lambda_1)}{I_o(\lambda_1)} = 10^{-6} ; \quad \frac{I_p(\lambda_2)}{I_o(\lambda_2)} = 10^4$$

با جایگذاری این نسبت‌ها در معادله‌های شدت بر حسب طول موج خواهیم داشت:

$$\frac{10^{-6}}{2} = e^{-D_1\phi/4\lambda_1} ; \quad \frac{10^4}{2} = e^{-D_2\phi/4\lambda_2}$$

با گرفتن ln از معادله‌های بالا، توجه به این نکته که  $\ln e^x = x$  و پس از حل جبری عبارت‌ها خواهیم داشت:

$$\ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right) = \ln(e^{-D_1\phi/4\lambda_1}) \Rightarrow \ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right) = -D_1\phi / 4\lambda_1$$

$$\ln\left(\frac{10^4}{2}\right) = \ln(e^{-D_2\phi/4\lambda_2}) \Rightarrow \ln\left(\frac{10^4}{2}\right) = -D_2\phi / 4\lambda_2$$

حال با تقسیم دو طرف این معادله‌ها داریم:

$$\frac{\frac{D_1\phi}{4\lambda_1}}{\frac{D_2\phi}{4\lambda_2}} = \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{10^4}{2}\right)} \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{10^4}{2}\right)}$$

و  $\lambda_1 = 800m$  ,  $\lambda_2 = 5000m$  پس:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{10^4}{2}\right)} \times \frac{800m}{5000m} = 0/23$$

1) گروه سنی زیر 15 سال الف) میزان روشنایی تصاویر عکاسی به شار انرژی رسیده به سنسورهای سی.سی.دی

یا فیلم‌های عکاسی بستگی دارد. تلسکوپ با افزایش سطح مقطع مؤثر، میزان کل انرژی رسیده در واحد زمان را افزایش می‌دهد.

برای آن که دو تصویر کاملاً مشابه باشند، باید انرژی رسیده به کل سطح دو تلسکوپ، با هم برابر باشد لذا برای  $E_1 = E_2$  و

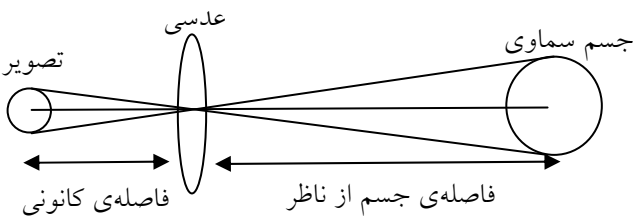
$$W_1 t_1 = W_2 t_2 \text{ پس داریم: } W = E / t \text{ که در آن } t \text{ زمان مورد نیاز و } W \text{ شار کل انرژی رسیده است؛ پس داریم:}$$

از طرف دیگر  $W = b.S$  که در آن  $b$  روشنایی جسم مورد مشاهده و  $S$  سطح مقطع جمع‌آوری نور است. اما از آنجا که هر دو تلسکوپ به یک منبع نوری واحد نگاه می‌کنند، میزان روشنایی رسیده به واحد سطح دو تلسکوپ یکسان است، پس داریم:

$$bS_1 t_1 = bS_2 t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

و از آنجا که سطح مقطع گردآوری نور تلسکوپ دایره است داریم:  $S = \pi r^2$  و  $r_1 = 20\text{cm} = 0/2\text{m}$  و  $r_2 = 15\text{cm} = 0/15\text{m}$  در نتیجه:

$$\frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2, \quad t_1 = 0/15\text{s} \Rightarrow t_2 = 0/15 \times \left(\frac{0/2}{0/15}\right)^2 = 0/26$$



ب) در تلسکوپ‌ها برای ثبت تصاویر واضح از اجرام سماوی، باید سنسور حساس یا فیلم عکاسی را در فاصله‌ای برابر فاصله‌ی کانونی تلسکوپ از آینه یا عدسی شیئی قرار داد؛ در این صورت شکل شماتیک ایجاد تصویر چنین می‌شود؛ حال با توجه به برقراری تشابه در مثلث‌ها داریم:

$$\frac{\text{قطر جسم سماوی}}{\text{فاصله‌ی جسم از ناظر}} = \frac{\text{قطر تصویر}}{\text{فاصله‌ی کانونی}}$$

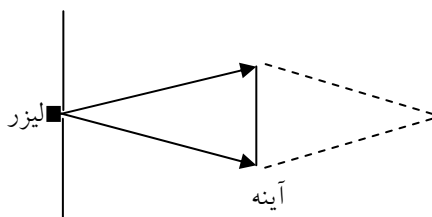
در نتیجه پس از عددگذاری به ازای هر دو مقدار فاصله‌ی کانونی تلسکوپ‌ها:

$$\frac{x_1}{150\text{cm}} = \frac{2(1/74 \times 10^6)\text{m}}{3/84 \times 10^8\text{m}} \Rightarrow x_1 = 1/35\text{cm}$$

$$\frac{x_2}{200\text{cm}} = \frac{2(1/74 \times 10^6)\text{m}}{3/84 \times 10^8\text{m}} \Rightarrow x_2 = 1/81\text{cm}$$

ج) بزرگنمایی تلسکوپ برابر نسبت فاصله‌ی کانونی عدسی شیئی به فاصله‌ی کانونی عدسی چشمی است؛ لذا:

$$m = \frac{F_o}{F_e} \Rightarrow m_1 = \frac{150\text{cm}}{2/5\text{cm}} = 60, \quad m_2 = \frac{200\text{cm}}{2/5\text{cm}} = 80$$



2) گروه سنی زیر 15 و 17 سال

قطر باریکه‌ی لیزر به دلیل موازی نبودن پرتوهایش و اثر پراش، هنگامی که به سطح ماه رسیده است، برابر هفت کیلومتر شده است. پس در مسیر برگشت و پس از انعکاس نور از سطح آینه‌ها نیز مجدداً اثر پراش باعث پخش شدن باریکه‌ی نور می‌شود؛ مطابق شکل مقابل و با توجه به قوانین تشابه، قطر باریکه‌ی لیزر وقتی به سطح زمین بر می‌گردد، دو برابر می‌شود. یعنی تقریباً 14 کیلومتر.

حال اگر لیزر با توان اولیه  $P$  تابیده باشد و نور لیزر در مساحتی دایروی به ابعاد  $\pi(\frac{7 \times 10^3 m}{2})^2$  روی سطح ماه پخش شده باشد، روشنایی رسیده به هر واحد سطح برای ناظری که روی سطح ماه ایستاده است، برابر می شود با:

$$b = \frac{P}{\pi(\frac{7 \times 10^3 m}{2})^2}$$

اما توجه داشته باشید که کل نور رسیده به سطح ماه، بازتابیده نمی شوند. چرا که آینه های کار گذاشته شده روی سطح ماه مربع هستند نه دایره؛ پس برای محاسبه سهم بازتابیده شده، میزان روشنایی واحد سطح را در مساحت بازتابنده یعنی مساحت آینه، ضرب می کنیم:

$$L = \frac{P}{\pi(\frac{7 \times 10^3 m}{2})^2} \cdot S, \quad S = 0/7 \times 0/7 m^2 \Rightarrow L = \frac{0/49P}{\pi(\frac{7 \times 10^3 m}{2})^2}$$

درخشندگی آینه ها روی سطح ماه محاسبه شده اند، حال باید ببینیم روشنایی این آینه ها در فاصله ی زمین از آینه ها چقدر می شود. از آنجا که فاصله ی مؤثر ناظر از لیزر دو برابر فاصله ی زمین تا ماه است، سطح مقطع نور بازتابیده از سطح ماه، 4 برابر می شود، لذا داریم:

$$b' = \frac{L}{4(0/7 \times 0/7 m^2)} \Rightarrow b' = \frac{0/49P}{\pi(\frac{7 \times 10^3 m}{2})^2 \times 4 \times 0/49} = \frac{P}{4\pi(\frac{7 \times 10^3 m}{2})^2}$$

اما ناظر تنها به اندازه ی سهمی که به مساحت سطح گردآوری نور تلسکوپش می رسد، از این روشنایی بهره مند می شود؛ از آنجا که تلسکوپ رصدخانه 30 اینچی است و هر اینچ 2/54 سانتی متر است، سطح مقطع مؤثر برابر می شود با:

$$S_t = \pi(\frac{D}{2})^2 = \pi(\frac{30 \times 2/54 m}{2})^2 = 4/5 \times 10^3 cm^2 = 0/45 m^2$$

پس روشنایی رسیده به کل سطح تلسکوپ برابر است با  $b'S_t$  که برابر است با:

$$b' = \frac{0/45P}{4\pi(\frac{7 \times 10^3 m}{2})^2}$$

حال باید ببینیم اگر نور این لیزر در مرز دیده شدن و دیده نشدن (قدر ظاهری +6) قرار گرفته باشد، توان لیزر چقدر باید باشد؟ برای این کار از مقایسه ی روشنایی چنین ستاره ای با روشنایی خورشید استفاده می کنیم:

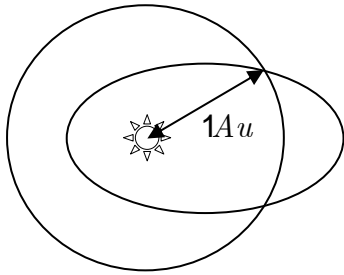
$$m_e - m_{\odot} = -2/5 \log \frac{b_e}{b_{\odot}}$$

که در آن  $m_e = +6$ ,  $m_{\odot} = -26/8$ ,  $b_{\odot} = 1370$ ؛ پس از جایگذاری این مقادیر در عبارت فوق خواهیم داشت، که باید ببینیم از این مقدار چه سهمی وارد چشم ناظر می شود ( $b_{eff}$ ). از آنجا که قطر مردمک چشم در

حالت ایده آل تقریباً به 7 میلی متر می رسد، داریم:  $b_{eff} = \pi \left( \frac{7 \times 10^3 m}{2} \right)^2 \times 10^{-10} = 3/8 \times 10^{15}$  که باید با  $b'$  برابر شود، لذا داریم:

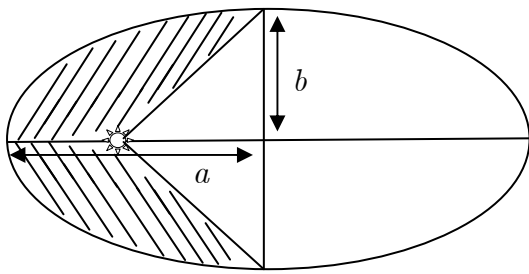
$$b_e = b' \Rightarrow 3/8 \times 10^{15} = \frac{0/45P}{4\pi \left( \frac{7 \times 10^3}{2} \right)^2} \Rightarrow P = 1/29 \times 10^6 W = 1/29 W$$

(3) گروه سنی زیر 15 و 17 سال برای آنکه دنباله دار در چنین مداری



حرکت کند، خورشید باید در یکی از کانون های بیضی قرار بگیرد. از طرف دیگر می دانیم که خورشید در مرکز مدار دایره وار زمین نیز قرار گرفته است و از آنجا که شعاع مداری زمین هم برابر 1 AU است؛ پس نقطه ای که روی مدار دنباله دار و مدار زمین قرار گرفته، در فاصله ی 1 واحد نجومی از خورشید واقع است.

از طرف دیگر در تعریف بیضی داشتیم، مجموع فاصله ی تمام نقاط واقع بر روی محیط بیضی تا دو کانون آن برابر قطر اطول یا  $2a$  است که در مورد این دنباله دار خاص، مقدار آن برابر  $2AU$  می شود. پس به سادگی می توان نتیجه گرفت که محل تقاطع دو مدار، روی قطر اصغر بیضی قرار گرفته است. حال کفایت مساحت ناحیه ی هاشور خورده را نسبت به مساحت کل بیضی  $(\pi ab)$  محاسبه کنیم، که برابر می شود با:



$$S_{\text{هاشور}} = \frac{S_{\text{بیضی}}}{2} - S_{\text{مثلث}} \Rightarrow S_{\text{هاشور}} = \frac{\pi ab}{2} - ab$$

و مقدار مطلوب برابر است با:

$$\frac{S_{\text{هاشور}}}{S_{\text{بیضی}}} = \frac{\frac{\pi ab}{2} - ab}{\pi ab} = \frac{ab(\pi - 2)}{2\pi ab} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 0/18$$

(4) گروه سنی زیر 15 و 17 سال از آنجا که مدار ماهواره دایروی و منطبق بر استوای زمین است، بیشترین میل

زمانی اتفاق می افتد که ماهواره بیشترین اختلاف منظر را نسبت به استوای سماوی داشته باشد؛ بیشترین اختلاف منظر

هم، زمانی اتفاق می افتد که ماهواره در کمترین فاصله ی مستقیم از ناظر

قرار داشته باشد؛ لذا مطابق شکل در مثلث قائم الزاویه  $EOS$ ، ابتدا

فاصله ی خطی ناظر تا ماهواره و سپس زاویه ی اختلاف منظر را

محاسبه می کنیم؛ در این مثلث زاویه ی بین دو ضلع  $EO$  و  $ES$  برابر

عرض جغرافیایی محل رصد (در این مسأله برابر 30 درجه است)،  $ES$  هم که برابر شعاع مدار ماهواره و  $EO$  برابر شعاع

زمین است، لذا داریم:

$$OS^2 = EO^2 + ES^2 - 2EO \times ES \cos SEO \Rightarrow OS = \sqrt{(3R)^2 + (R)^2 - (3R)R \cos 30} = 2/19$$

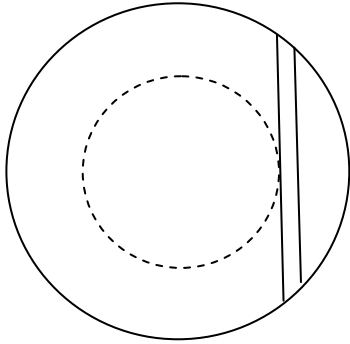


حال در همین مثلث از قضیه سینوس‌ها برای پیدا کردن زاویه‌ی اختلاف منظری یا ESO استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 30}{2/19R} = \frac{\sin x}{R} \Rightarrow x = 13/19$$

(5) گروه سنی زیر 17 سال

تونل بین دو شهر باید مطابق شکل



مقابل باشد. با توجه به صورت سؤال، تنها عامل محرک، و نیروی مؤثر در جابجا کردن مرسوله‌ها، نیروی جاذبه‌ی بین دو جسم است. مقدار این نیرو از

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

رابطه‌ی تا مرکز زمین است.  $M$  نیز جرم مؤثر بر جابه‌جایی وزنه است که طبیعتاً با توجه

به فاصله‌ی مرسوله از مرکز زمین تغییر می‌کند. لذا رابطه‌ای برای محاسبه‌ی جرم  $M$  مؤثر برحسب فاصله‌ی مرسوله از مرکز بدست می‌آوریم.

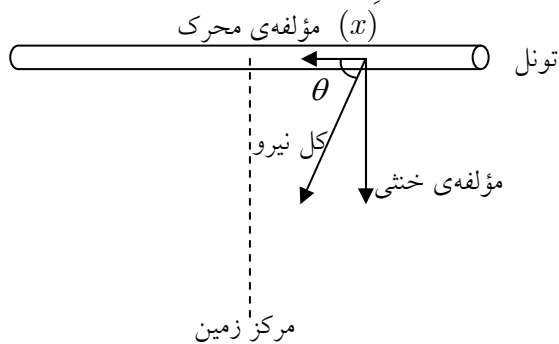
از آن‌جا که به طور تقریبی و با دقت خوبی چگالی زمین در همه‌جا یکسان است، می‌توانیم بنویسیم:  $\rho_1 = \rho_2$  پس داریم:

$$\frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} \Rightarrow \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} \Rightarrow M_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 M_1$$

که در آن  $M_1$  جرم زمین،  $r_1$  شعاع زمین و  $r_2$  فاصله‌ی مرسوله از مرکز زمین است؛ با جایگذاری این رابطه در معادله‌ی نیرو داریم:

$$F = \frac{Gm}{r^2} \times M_{\oplus} \left(\frac{r}{r_{\oplus}}\right)^3 = \frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \times r$$

توجه داشته باشید که جهت این نیرو در راستای مرکز زمین است، پس می‌توان این نیرو را به دو مؤلفه‌ی در راستای تونل و عمود بر تونل تجزیه کرد. با توجه به صورت سؤال و با توجه به بی‌تأثیر بودن اصطکاک، مؤلفه‌ی عمود بر راستای تونل خنثی می‌شود. تنها عاملی که باعث به حرکت درآمدن مرسوله می‌شود، مؤلفه‌ی در راستای تونل نیرو است.



اگر  $\theta$  را زاویه‌ی بین بردار مؤلفه‌ی در راستای مسیر حرکت و

مرکز زمین بنامیم، نیروی مؤثرمان برابر خواهد شد با:

$$F_{\text{مؤثر}} = F_{\text{کل}} \times \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

در نتیجه:

$$F_{\text{کل}} = \frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \times r \times \frac{x}{r} = \frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \times x$$

که تشابه جالبی با معادله‌ی نیروی فنر دارد ( $F = Kx$ ). از برقراری تناظر یک به یک بین این دو معادله خواهیم داشت:

$$K = \frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}^3}$$

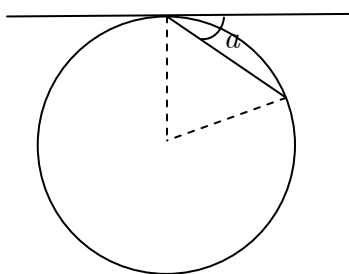
پس حرکت مرسوله‌ی مورد نظر به صورت فزونی و رفت و برگشتی خواهد بود. در بخش مطالعه‌ی فنر آموخته بودیم که دوره تناوب نوسان فنر از رابطه‌ی  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  بدست می‌آید که در آن  $m$  جرم وزنه و  $K$  درجه سختی فنر است که در این مورد خاص مقدارش را از قبل محاسبه کرده بودیم؛ در نتیجه:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}$$

اما برای ارسال مرسوله به سوی دیگر تونل، تنها کافیست به اندازه‌ی نصف دوره تناوب نوسان صبر کنیم یعنی زمان  $t$  مطلوب برابر است با  $\frac{T}{2}$ . پس از مقدار گذاری با توجه به جدول ثوابت، به مقدار 42 دقیقه برای نیم دوره تناوب می‌رسیم. همان‌طور که از معادله نیز مشخص است، مقدار عددی این انتقال، مستقل از طول تونل (یا مختصات شهر مبدأ و مقصد) و وزن مرسوله است.

### 5) گروه سنی زیر 15 سال

می‌دانیم فرد در حال اشاره به نقطه‌ای از زمین است و تونل نیز از همان نقطه بیرون خواهد آمد. از طرفی می‌دانیم که از هر دو نقطه بر سطح کره، فقط و فقط یک دایره‌ی عظیمه عبور می‌کند، پس می‌توانیم به گونه‌ای به شکل نگاه کنیم که هر دو نقطه‌ی مبدأ و مقصد روی دیواره‌ی کره قرار بگیرند.

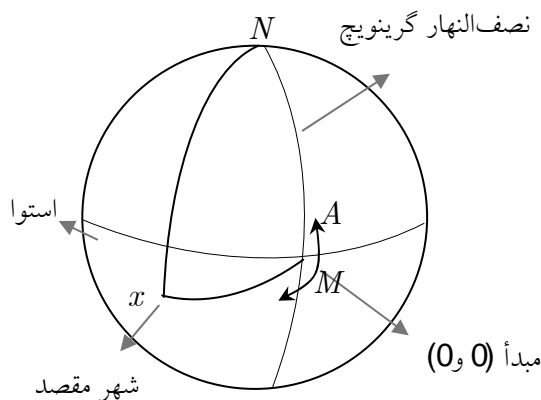


از مرکز زمین خطوط مستقیمی به این دو نقطه وصل می‌کنیم: از آنجا که یکی از تعریف‌های افق مماس بر سطح کره است و فرد در حال اشاره به نقطه‌ای با ارتفاع  $a$  است، زاویه‌ی بین خط مماس و تونل برابر  $a$  خواهد بود. حال طبق تعریف زاویه‌ی ظلّی فاصله‌ی دو نقطه‌ی مبدأ و مقصد برابر  $2a$  خواهد شد.

در گام بعدی مختصات دو شهر را روی کره‌ی زمین معین می‌کنیم:

1- می‌دانیم طول دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از دو شهر، یکتا و برابر  $2a$  است.

2- سمت شهر مورد اشاره‌ی رصدگر را می‌دانیم و همچنین می‌دانیم که سمت از راستای شمال اندازه‌گیری می‌شود و آنرا با نماد  $A$  بر روی شکل نمایش می‌دهیم.



بسته به اینکه سمت در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار داشته باشد ( $A$  یا  $360-A$ )، قضیه‌ی کسینوس‌ها را در مثلث  $MxN$  می‌نویسیم؛ چنین خواهیم داشت (برای رأس  $m$ ):

$$\cos(90+\varphi) = \cos 90 \cos 2 + \sin 90 \sin 2 \cos(360-A) \quad \text{ناحیه 3}$$

$$\cos \varphi = \cos 90 \cos 2 + \sin 90 \sin 2 \cos(360-A) \quad \text{ناحیه 2}$$

$$\cos \varphi = \cos 90 \cos 2 + \sin 90 \sin 2 \cos A \quad \text{ناحیه 1}$$

$$\cos(90+\varphi) = \cos 90 \cos 2 + \sin 90 \sin 2 \cos A \quad \text{ناحیه 4}$$

از این روابط عرض جغرافیایی شهر مقصد را بدست می‌آوریم.

برای استخراج طول جغرافیایی هم از قضیه‌ی سینوس‌ها در همان مثلث استفاده می‌کنیم، برای مثال مطابق شکل (در ناحیه‌ی 3) داریم:

$$\frac{\sin(360-A)}{\sin(90+\varphi)} = \frac{\sin l}{\sin 2} \quad (\text{طول جغرافیایی غربی است})$$

6) گروه سنی زیر 15 و 17 سال منظور سؤال از بیان این نکته که گنبد چند درجه جابجا می‌شود، بدست آوردن

مقداری است که طی این مدت، سمت ستاره تغییر کرده است. برای محاسبه‌ی این مقدار، میزان سمت جنوبی ستاره را در هنگام طلوع بدست می‌آوریم. در مثلث  $PZS$  قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع  $PS$  چنین می‌نویسیم:

$$\cos(90+\delta) = \cos(90-\varphi) \cos(90-a) + \sin(90-\varphi) \sin(90-a) \cos x$$

پس از جایگذاری مقادیر داریم:

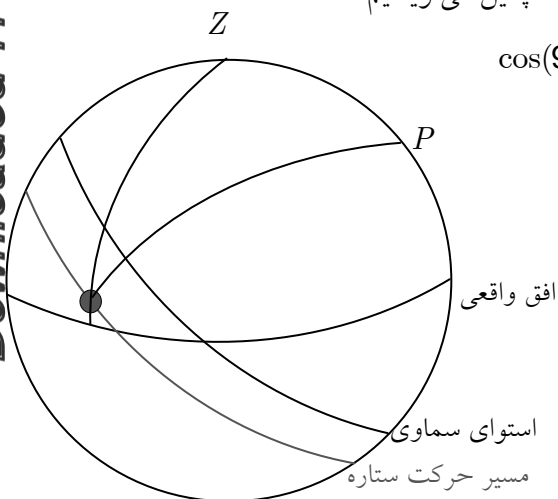
$$\cos 126 = \cos 80 \cos 56 + \sin 80 \sin 56 \cos A \Rightarrow A = 147$$

میزان سمت ستاره در هنگام غروب هم برابر می‌شود با  $360-A$  (به

جهت تقارن کره) پس سمت غروب برابر است با:  $213$

بنابراین از لحظه‌ی طلوع تا غروب، گنبد باید به اندازه‌ی

$$213 - 147 = 66 \quad \text{موازی افق بچرخد.}$$



7) گروه سنی زیر 15 و 17 سال با تغییر جرم جسم مرکزی، اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای تغییر نمی‌کند؛ اما از

آنجا که میزان نیروی گرانش اعمال شده از سوی جسم مرکزی افزایش می‌یابد؛ جسم از حرکت روی مدار دایروی به حرکت روی مدار بیضوی تغییر موقعیت می‌دهد. پس می‌توانیم اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای برای جسمی که بر مدار دایروی حرکت می‌کند

( $L = m\sqrt{GMa}$ ) و برای جسمی که بر مدار بیضوی حرکت می‌کند ( $L' = m\sqrt{GM'a(1-e^2)}$ ) را برابر قرار دهیم. آنگاه

خواهیم داشت:

$$L = L' \Rightarrow m\sqrt{GMa} = m\sqrt{GM'a'(1-e^2)}$$

اما جرم جسم مرکزی دو برابر شده است، پس داریم:  $M' = 2M$ . بعد از جایگذاری و ساده‌سازی جبری خواهیم داشت:

$$a = 2a'(1-e^2) \quad (*)$$

زمانی که افزایش جرم اتفاق می‌افتد، جسم ثانویه از حرکت روی مدار دایره‌ای به حرکت روی مدار بیضوی تغییر وضعیت می‌دهد پس در لحظه‌ی افزایش جرم، جسم ثانویه در اوج (بیشترین فاصله از جسم مرکزی) مدار ثانویه (مدار بیضوی) قرار می‌گرفته است (به شکل دقت کنید).

برای فاصله‌ی اوج در مدار بیضوی داریم که:  $r = a'(1+e)$

اما این فاصله برابر شعاع مدار دایره‌ی اولیه است؛ لذا داریم:  $a = a'(1+e)$   
از ترکیب این معادله، با معادله‌ی (\*) داریم:

$$2(1-e^2) = (1+e) \Rightarrow 2-2e^2 = 1+e \Rightarrow e = \frac{1}{2}, \quad a' = \frac{2}{3}a$$

