سوالات و پاسخ

مرحله دوم

دومین المپیاد

نجوم و اخترفیزیک

G	ثابت جهانی گرانش	$6/67\times 10^{-11}\,m^{2}\,kg^{-1}\,s^{-1}$
$L_{\odot}$	درخشندگی خورشید	$3/85\times 10^{26}\,W$
c	سرعت نور	$3\times 10^{8}\,ms^{-1}$
	شعاع سیاره‌ی زهره	$6052\,km$
	شعاع سیاره‌ی عُطارِد	$2240\,km$
	شعاع خورشید	$7\times 10^{5}\,km$
	شعاع زمین	$6378\,km$
	شعاع مداری زهره	$0/723\,Au$
	شعاع مداری عُطارِد	$0/387\,Au$
	پارسک	$3/1\times 10^{13}\,km$
	واحد نجومی	$1/5\times 10^{8}\,km$
	جرم خورشید	$1/99\times 10^{30}\,kg$
	جرم عُطارِد	$3/28\times 10^{23}\,kg$
	جرم زهره	$4/87\times 10^{24}\,kg$
	جرم زمین	$5/97\times 10^{24}\,kg$
	دوره تناوب مداری عطارد	$88\,day$
	دوره تناوب مداری زهره	$225\,day$

1) بیشترین مدت زمان ممکن بر حسب ساعت ΔT برای گذر سیاره‌ی عطارد از مقابل قرص خورشید (از تماس اول تا تماس چهارم)، از دید ناظر سیاره‌ی زهره چقدر است؟ مدار سیارات عطارد و زهره را دایره و منطبق بر صفحه‌ی دایره‌البروج فرض کنید و از حرکت وضعی ابرهای زهره صرف‌نظر کنید.

2) باستان‌شناسان با بررسی نقوش حک شده بر دیوار غاری که به نظر می‌رسد 5000 سال قدمت داشته باشد به این نتیجه رسیده‌اند که این نقوش ستاره‌های آسمان را نشان می‌دهند. باستان‌شناسان بر مبنای اسطوره‌های قدیمی، بعضی از آن ستاره‌ها را شناخته‌اند. در شکل صفحه‌ی بعد، یکی از این نقوش نشان داده شده و در جدول زیر مشخصات اخترفیزیک ستاره‌هایی که شناسایی شده‌اند، نشان داده شده است. بردارهایی که در شکل کشیده شده، جهت حرکت فضایی ستاره‌ها را نشان می‌دهند. به کمک اطلاعاتی که در جدول زیر داده‌شده، ضمن محاسبه‌ی حرکت ویژه‌ی ستاره 4، مشخص کنید که این نقش مربوط به کدام صورت فلکی در آسمان فعلی است.

ستاره	سرعت فضایی V_s	جابه‌جایی خط جذبی $\lambda_\circ = 4405\mathring{A}$	زاویه اختلاف منظر	حرکت ویژه
1	$76/8 km/s$	۰/۳۶۷۱ $\mathring{A}$	$0/25 arcsec$	$3/83 arcsec/yr$
2	$86/2 km/s$	۰/۲۲۸۵ $\mathring{A}$	$0/50 arcsec$	$8/94 arcsec/yr$
3	$99/4 km/s$	۰/۴۵۵۲ $\mathring{A}$	$0/40 arcsec$	$7/97 arcsec/yr$
4	$70/1 km/s$	۰/۲۴۸۵ $\mathring{A}$	$0/31 arcsec$	؟
5	$48/4 km/s$	۰/۵۵۸۶ $\mathring{A}$	$0/59 arcsec$	$3/72 arcsec/yr$
6	$68/9 km/s$	۰/۵۹۲۰ $\mathring{A}$	$0/62 arcsec$	$7/31 arcsec/yr$
7	$68/9 km/s$	۰/۱۰۶۲ $\mathring{A}$	$0/33 arcsec$	$4/77 arcsec/yr$

3) سیاره‌ی زهره به گونه‌ای به دور خورشید می‌گردد که دوره تناوب گردش مداری آن تقریباً برابر است با دوره‌ی تناوب گردش این سیاره به دور خودش. حساب کنید یک سالِ زهره برابر با چند شبانه‌روز این سیاره است؟

4) مشاهدات دقیق نشان داده است که درخشان‌ترین حالتِ سیاره‌ی زهره در آسمانِ زمین هنگامی رخ می‌دهد که زاویه‌ی کشیدگیِ این سیاره، 39 درجه است. فاز (φ)(زاویه قاچی از نیم کرهٔ روشنِ زهره که از زمین قابل مشاهده است) و اندازه‌ی قطر ظاهری (θ) زهره را در این حالت حساب کنید.

5) در یک کهکشان مارپیچی با دو بازو (طبق شکل زیر)، ساختار مارپیچی با سرعت زاویه‌ایِ $\Omega_p = 10(km)(S^{-1})(kpc^{-1})$ دوران می‌کند. در صورتی که دوره‌ی تناوب مداریِ ستاره‌ی S که در مدار دایره‌ای به دور مرکز کهکشان می‌گردد برابر با $T_S = 2\times 10^8$ سال و مدت زمانِ عبور ستاره‌ها از داخلِ بازو، $t = 4\times 10^7$ سال باشد، اندازه‌ی زاویه‌ایِ مسیری که ستاره در داخلِ بازوی کهکشان طی می‌کند $(\Delta\theta)$، چقدر است؟

فرض می‌کنیم بازوهای کهکشان تا جایی ادامه پیدا می‌کند که دوره تناوب مداریِ ستاره‌ها $2\pi / \Omega_p$ است. در این صورت شعاعِ خارجیِ کهکشان $(R_\circ)$، چند برابر شعاع مدارِ ستاره‌ی S $(R_\circ)$ است؟ در حل این مسئله فرض کنید نیروی مرکزیِ اِعمالی به هر ستاره، متناسب با $\frac{-1}{R}$ است که در آن R فاصله‌ی ستاره از مرکز کهکشان است.

6) ذراتِ گرد و غبار در بسیاری از منظومه‌های اخترفیزیکی، ازجمله در محیط‌های میان‌ستاره‌ای و قرص‌های برافزایشی مشاهده می‌شوند. البته نوع این ذرات در منظومه‌های مختلف یکسان نیست و اغلب ترکیباتی پیچیده دارند. در برخی از قرص‌های برافزایشی که احتمالاً بستر شکل‌گیری سیارات هستند، چنین ذراتی که اندازه‌ی آن‌ها از مرتبه‌ی $10^{-3} cm$ است، مشاهده شده است. در یکی از منظومه‌ها که جرم ستاره‌ی مرکزی آن در حدود جرم خورشید تخمین زده می‌شود، شارِ انرژیِ گسیل شده از جرم مرکز، در فاصله‌ی r برابر است با

$$F(r) = \frac{1/4 \times 10^{7}}{r^{2}} (erg)(cm^{-2})(s^{-1})$$

که در آن r بر حسب واحد نجومی اندازه‌گیری می‌شود. با این فرض که ذرات گرد و غبار در مدارهایی دایره‌ای به دور ستاره‌ی مرکزی می‌گردند، می‌خواهیم جنس ذرات را تعیین کنیم. اگر فرض کنیم همه‌ی این ذرات از یک جنس هستند، کم‌ترین چگالیِ ممکن برای یک ذره در این قرص برافزایشی $(\rho_{\min})$ بر حسب گرم بر سانتی‌متر مکعب چقدر است؟

7) در یک مطالعه‌ی طیف‌سنجی برای یک منظومه‌ی دوتایی با دوره تناوب P و زاویه‌ی میل داری $i = 90^{\circ}$، طیف‌های زیر بدست آمده‌اند. اگر زمان طیف nاُم بر حسب تاریخ ژولیانی را با t_n نشان دهیم، با فرض این که $t_n - t_{n-1}$ مقداری ثابت داشته باشد و $t_1 = 2443546/345$ و $t_5 = 2443548/756$، اندازه‌ی نیم محورِ بزرگِ مدار (a) و زمان‌ها t_2 و t_3 را برای این منظومه‌ی دوتایی بدست آورید. جرم مؤلفهٔ کم جرم را برابر جرم خورشید بگیرید.

8) اخترشناسان برای بررسی حرکت ستاره‌ها در کهکشان راه‌شیری، از دستگاهِ مختصاتِ کهکشانی استفاده می‌کنند. در این دستگاهِ مختصات، صفحه‌ی مرجع، صفحۀ کهکشان راه‌شیری است. هر نقطه روی کره‌ی سماوی در دستگاهِ مختصاتِ کهکشانی، با دو زاویه‌ی عرض، کهکشانی (b)و طول کهکشانی (l) مشخص می‌شود. عرض و طولِ کهکشانی همچون زاویه‌ی میل و بعد در دستگاهِ مختصاتِ استوایی تعریف می‌شوند؛ با این تفاوت که در دستگاه مختصاتِ کهکشانی، صفحه‌ی مرجع، صفحه‌ی کهکشان و راستای مبداء اندازه‌گیریِ طولِ کهکشانی، راستای مرکزِ کهکشان راه‌شیری (نقطه‌ای در صورت‌فلکی قوس با مختصاتِ استوایی $(\alpha = 17^h 46^m \ , \ \delta = -29^\circ 00')$ است. در دستگاهِ مختصاتِ کهکشانی، مختصاتِ استواییِ قطب شمالِ کهکشان عبارت است از $\alpha_G = 12^h\, 51\; 4^m \ , \ \delta_G = +27^\circ 08'$. طرف راستِ روابطِ داخلِ مستطیل‌های زیر را که معادلاتِ تبدیلِ مختصاتِ استوایی به مختصاتِ کهکشانی است، بدست آورید. l_N نشان‌دهنده‌ی طولِ کهکشانیِ قطب شمال سماوی است.

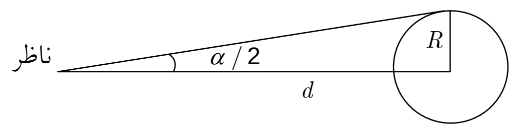
$$\boxed{\sin(l_N - l)\cos b = \qquad\qquad}$$

$$\boxed{\cos(l_N - l)\cos b = \qquad\qquad}$$

$$\boxed{\sin b = \qquad\qquad}$$

9) در شکل زیر ساعت آفتابیِ افقیِ ساده‌ای را مشاهده می‌کنید که شاخصِ آن مثلثی است که به طور عمودی روی سطحِ افقیِ ساعت، ثابت شده است. زاویه‌ی φ در شکلِ زیر برابر است با عرضِ جغرافیاییِ مکانی که ساعت در آن به کار می‌رود. رابطه‌ای به دست آورید که به کمک آن بتوان برای هر ساعت از روز (h)، زاویه‌ی γ (زاویه‌ای که سایه‌ی راستای ضلعِ موربِ شاخص (AB)، روی سطحِ ساعت با راستای شمال می‌سازد) را حساب کرد. مسئله را برای حالتی حل کنید که خورشید در نقطه‌ی اعتدالِ بهاری قرار دارد.

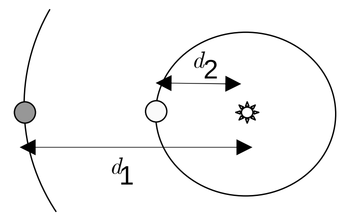
1) ابتدا بزرگی زاویه‌ای خورشید (زاویه‌ای که دو سرِ قرص خورشید با چشم ناظر روی سیاره‌ی زهره می‌سازد) و بزرگی زاویه‌ای عطارد را محاسبه می‌کنیم:



$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d} = \frac{7\times 10^{8}\,m}{0/723\times 1/5\times 10^{11}\,m}$$

$\Rightarrow \alpha = 44' \, 23''$ بزرگی زاویه‌ای خورشید

و به همین ترتیب، سیاره عطارد در فاصله زیر از زهره قرار دارد (به شکل نگاه کنید)

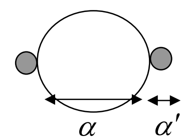


فاصله‌ی عطارد تا ناظر روی زهره $d_1 - d_2 = 0/723 - 0/387\,Au = 0/336\,Au$

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \frac{R'}{d'} = \frac{2440\times 10^{3}\,m}{0/336\times 1/5\times 10^{11}\,m}$$

$\alpha' = 20''$

حال زاویه‌ای که سیاره عطارد نسبت به خط خورشید – زهره طی می‌کند (از تماس اول تا تماس چهارم) را محاسبه می‌کنیم:



زاویه طی شده $= \alpha + \alpha' = 20'' + 44' \, 23'' = 44' \, 43''$

اما اگر از دوره تناوب وضعی زهره صرف نظر کنیم، تنها حرکت مداری زهره و حرکت مداری عطارد موجب جابه‌جایی و گذر عطارد از مقابل خورشید می‌شود. بنابراین از مفهوم سرعت زاویه‌ای نسبی استفاده می‌کنیم. بنا بر تعریف سرعت زاویه‌ای، زاویه‌ی طی شده بر حسب رادیان است. یک سیاره، در یک دوره تناوب زاویه 2π طی می‌کند. پس داریم:

$$w_1 = \frac{2\pi}{88(day)\times 24(hour)\times 3600(s)} = 8/26\times 10^{-7}\,\frac{rad}{s}$$

$$w_2 = \frac{2\pi}{225(day)\times 24(hour)\times 3600(s)} = 3/23\times 10^{-7}\,\frac{rad}{s}$$

و عطارد از دید زهره با سرعت $w_1 - w_2$ حرکت می‌کند؛ پس سرعت زاویه‌ای نسبی برابر است با: $w_1 - w_2 = 5/03\times 10^{-7}\,\frac{rad}{s}$

این مقدار به این معنی است که سیاره عطارد در آسمان زهره، در هر ثانیه $w_1 - w_2 = 5/03\times 10^{-7}\,\frac{rad}{s}$ جابه‌جا می‌شود. اما پیش‌تر محاسبه کردیم که عطارد برای عبور از مقابل قرص خورشید (بین تماس اول تا تماس چهارم) باید زاویه‌ای برابر $44' \, 43''$ را طی کند. ابتدا مقدار این زاویه را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

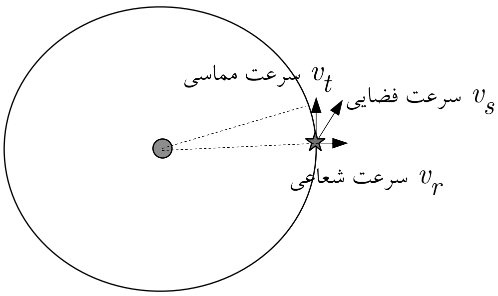
$$\Delta\varphi = \left(\frac{44}{60} + \frac{43}{3600}\right)\times\frac{2\pi}{360} = 1/30\times 10^{-2}\,rad$$

بنابراین زمان لازم برای عبور برابر است با:

$$\Delta\varphi = (w_1 - w_2)\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{1/30\times 10^{-2}\,rad}{5/03\times 10^{-7}\,\frac{rad}{s}} = 2/58\times 10^{4}\,s = 7^{h}\,10^{m}\,59^{s}$$

2 نخست حرکت ویژه‌ی ستاره‌ی 4 را تعیین می‌کنیم، با توجه به اینکه زاویه اختلاف منظر این ستاره برابر با $0/31$ ثانیه قوس است، فاصله‌ی آن بر حسب پارسک برابر می‌شود با $d_4 = \frac{1}{\theta''} = 3/22pc$



در شکل، v_s, v_t, v_r به ترتیب بردار سرعت شعاعی، سرعت مماسی و سرعت فضایی ستاره هستند.

با توجه به شکل دایره $d\theta = v_t$، پس از تبدیل واحد داریم:

حرکت ویژه $v_t = 4/74 d_4 \mu_4$. که در آن μ برحسب ثانیه قوس بر سال،

در این عبارت، v_t بر حسب متر بر ثانیه و d_4 بر حسب پارسک است. $\mu_4 = \frac{v_t}{4/74 d_4}$

با توجه به این‌که بردار سرعت فضایی، حاصل برآیند بردار سرعت شعاعی و سرعت مماسی است؛ می‌توانیم بنویسیم: $v_t = \sqrt{v_s^2 - v_r^2}$

برای محاسبه‌ی v_r نیز از دوپلر استفاده می‌کنیم؛ پس:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_\circ} \Rightarrow v_r = 16/9 km/s$$

در نتیجه $v_t \simeq 68 km/s$. بنابراین μ_4 برابر است با: $\mu_4 \simeq 4/44 \text{arc sec}/yr$

حال می‌توانیم با این فرض که سرعت ویژه‌ی ستاره‌ها در این مدت ثابت مانده باشد، جابه‌جایی زاویه‌ای ستاره‌ها را از 5000 سال پیش تاکنون محاسبه کنیم که در آن $\Delta\theta_i$ برحسب درجه بدست می‌آید.

$$\Delta\theta_i = \mu_i \frac{\Delta t}{3600}, \quad \Delta t = 5000 year$$

اگر همین کار را برای همه‌ی 7 ستاره‌ی فهرست شده در جدول انجام دهیم، به ترتیب اعداد ذیل را بدست می‌آوریم.

$\Delta\theta_1 = 5/32 \deg$, $\Delta\theta_5 = 5/17 \deg$

$\Delta\theta_2 = 12/4 \deg$, $\Delta\theta_6 = 10/20 \deg$

$\Delta\theta_3 = 11/0 \deg$, $\Delta\theta_7 = 6/63 \deg$

$\Delta\theta_4 = 6/11 \deg$

با استفاده از این اعداد و نقشه‌ی آمده در صورت سؤال، مکان‌های جدید این 7 ستاره مشخص می‌شود. این نقش متعلق به صورت فلکی جبار است.

3 ناظری را روی سطح سیاره‌ی زهره در نظر بگیرید؛ این ناظر دو چرخش را حس می‌کند. یکی چرخش ستارگان که ناشی از چرخش سیاره به دور محورش است و دیگری چرخش خورشید که ناشی از حرکت مداری سیاره‌ی زهره است. برای محاسبه‌ی تأثیر مجموع این دو حرکت، باید سرعت زاویه‌ای نسبی (دوره‌ی تناوب هلالی) را محاسبه کنیم. از آنجا که دوره تناوب وضعی و مداری سیاره مساوی‌اند، هر دو را با نماد T نشان می‌دهیم. بنابراین سرعت‌های زاویه‌ایِ ناشی از حرکت مداری سیاره و حرکت وضعی آن برابر می‌شود با: $w_{\text{وضعی}} = w_{\text{مداری}} = \frac{2\pi}{T}$

اما ناظر اثر برآیند این دو سرعت زاویه‌ای را حس می‌کند (چرا که جهت تناوب وضعی و انتقالی سیاره یکسان است). یعنی:

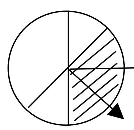
Ê ¬ · Ž ý » Ž ‡ ZÁŠ Ë Y € Ë Á

$$w_{\text{کل}} = w_1 + w_2 = \frac{4\pi}{T}$$

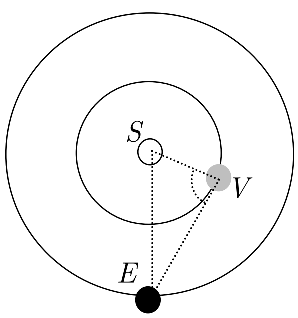
رابطه‌ی شبانه‌روز خورشیدی با سرعت زاویه‌ای ظاهری خورشید بدین قرار است:

$$w_{\text{ظاهری}} = \frac{2\pi}{T_{\text{شبانه روز}}} \qquad \Rightarrow T_{\text{شبانه روز}} = \frac{T}{2}$$

4) زاویه‌ی کشیدگی زهره زاویه‌ی بین خورشید و زهره از دید ناظر زمینی است. در این شکل خط عمود بر جهت زمین، قسمت قابل رویت توسط زمین و خط عمود بر خورشید قسمت روشن سیاره را نشان می‌دهند.



زاویه‌ی φ ناحیه‌ای از سطح ناهید است که با هاشور خاکستری مشخص شده است. φ زاویه‌ی بین زمین و خورشید از دید ناظر مستقر بر سطح زهره است؛ پس در شکل زیر، زاویه‌ی SVE برابر زاویه‌ی فاز و زاویه‌ی SEV زاویه‌ی کشیدگی است. حال کافیست در مثلث SVE و برای ضلع زمین - خورشید، قضیه‌ی سینوس‌ها را بنویسیم:



$$\frac{\sin SEV}{SV} = \frac{\sin SVE}{SE}$$

با جایگذاری مقادیر از جدول ثوابت داریم:

$$\frac{\sin 39}{0/723} = \frac{\sin SVE}{1} \Rightarrow SVE = 60^\circ$$

که همان زاویه‌ی فاز است. حال با دانستن دو زاویه از مثلث می‌توانیم، زاویه‌ی سوم را نیز حساب کنیم: $180-(60+39)=81$. حال بار دیگر با نوشتن قضیه‌ی سینوس‌ها اما این بار برای ضلع EV داریم:

$$\frac{\sin SEV}{SV} = \frac{\sin ESV}{EV}$$

که با جایگذاری اعداد، طول EV برابر 1/13 واحد نجومی بدست می‌آید. حال برای محاسبه‌ی قطر ظاهری داریم:

$$\tan\theta = \frac{R}{D} = \frac{R_v}{EV} = \frac{6052\,km}{1/13 \times 1/5 \times 10^8\,km} = 3/5 \times 10^5 \Rightarrow \theta = 2/04 \times 10^3 \deg = 7/36''$$

5) برای حل قسمت اول ابتدا سرعت زاویه‌ای ستاره‌ی S حول مرکز کهکشان را محاسبه می‌کنیم.

$$\Omega_S = \frac{2\pi}{T_s} = 10^{-15}\pi S^{-1} \Rightarrow \Omega_s > \Omega_P$$

در مدت زمان t، ستاره به اندازه‌ی α و بازوها به اندازه‌ی α' رادیان چرخیده‌اند. اگر سرعت زاویه‌ای بازوها و ستاره را ثابت بگیریم، داریم:

$$\alpha = \Omega_s t \ , \ \alpha' = \Omega_p t \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\theta = \alpha - \alpha' = (\Omega_s - \Omega_p)t$$

با توجه به اعداد مسئله داریم:

$$\Delta\theta \simeq 1/22\,rad$$

در قسمت بعد ابتدا رابطه‌ی دوره تناوب با R را تعیین می‌کنیم. برای جسمی که با سرعت ثابت در مداری دایروی در حال حرکت است داریم:

$$\sum \vec{F} = mR\omega^2(-\hat{R}) = -\frac{cte}{R}(\hat{R}) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{cte}{mR^2}$$

و $\omega = \frac{2\pi}{T}$ پس داریم:

$$(\frac{2\pi}{T})^2 = \frac{cte}{mR^2} \quad \Rightarrow \quad T = cte\,R$$

بنابراین برای دو ستاره‌ی S_1 و S_2 داریم:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{R_\circ}{R_s} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\Omega p}\right)}{T_s} \simeq 310$$

6) طبق صورت سؤال، شار تابشیِ گسیل شده برابر است با:

$$F(r) = \frac{1/4 \times 10^7}{r^2}(erg)(cm^{-2})(s^{-1})$$

که در آن r برحسب واحد نجومی و هر اِرگ هم برابر $10^{-7} j$ است؛ پس نخست باید رابطه را بر حسب کمیت‌های متداول بازنویسی کنیم:

$$F(r) = \frac{1/4 \times 10^7}{r^2} \times 10^{-7} \times (1/5 \times 10^{11})^2 = \frac{3/15 \times 10^{22}}{r^2}(J)(cm^{-2})(s^{-1})$$

که در آن r بر حسب متر و $F(r)$ انرژی تابشی رسیده به هر سانتی‌متر مربع است. اما ضلع هر کدام از این ذره‌ها $10^{-3} cm$ است، لذا مساحت مؤثر برابر می‌شود با مجذور این مقدار (به فرض هم‌شکل و مربع بودن همه‌ی ذرات)؛ پس داریم:

$$F(r) = \frac{3/15 \times 10^{22}}{r^2} \times 10^{-6} = \frac{3/15 \times 10^{16}}{r^2}(J)(s^{-1})$$

اما این مقدار، میزان انرژی رسیده به سطح ذره است، حال باید فشار تابشی مؤثر بر این ذره را اندازه بگیریم:

$$F_t = \frac{bA}{c} = \frac{F(r)}{c} = \frac{1/05 \times 10^8}{r^2}$$

پس باید معادله‌ی نیروها را برای شرایط پایداری ذره در گردش به دور خورشید بنویسیم: $F_t - F_G = mr\omega^2$ که در آن F_G نیروی ناشی از جاذبه و F_t نیروی ناشی از فشار تابشی است. برآیند این دو نیرو باید با نیروی مرکزگرا در گردش سیاره به دور خورشید برابر باشد: $f = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$. که در این عبارت ω سرعت گردش زاویه‌ای و برابر $\frac{2\pi}{T}$ است. لذا داریم:

$$\frac{1/05 \times 10^8}{r^2} - \frac{GmM}{r^2} = mr(\frac{2\pi}{T})^2$$

حال می‌توانیم از قانون سوم کپلر ($T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}r^3$)، مقدار دوره تناوب ذرات را در معادله وارد کنیم:

$$\frac{1/05\times 10^{8}}{r^{2}}-\frac{GmM}{r^{2}}=mr\frac{4\pi^{2}G(m+M)}{4\pi^{2}r^{3}}\Rightarrow$$

$$1/05\times 10^{8}-GmM=mG(m+M)$$

که جرم ذرات را در مقایسه با جرم ستاره ناچیز در نظر می‌گیریم؛ بنابراین:

$$1/05\times 10^{8}-GmM=mG(m+M)\ \Rightarrow$$

$$1/05\times 10^{8}-GmM\simeq mGM\Rightarrow\ 2GmM=1/05\times 10^{8}\Rightarrow$$

$$m=\frac{1/05\times 10^{8}}{2\times 6/67\times 10^{-11}\times 1/99\times 10^{30}}=3/95\times 10^{-13}kg=3/95\times 10^{-10}g$$

ذرات هم، مکعب‌هایی به ضلع $10^{-3}cm$ در نظر گرفته شده بودند؛ لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{3/95\times 10^{-10}}{(10^{-3})^{3}}=0/39g/cm^{3}$$

7) می‌دانیم که علت جابه‌جایی خطوط طیفی حرکت شعاعی دو ستاره در امتداد راستای دید است که این حرکت ناشی از حرکت مداری ستاره‌ها است. در لحظه‌ی t_1 که طیف دو ستاره بر هم منطبق است، حرکت شعاعی دو ستاره صفر است. مشاهده می‌کنیم که در t_5 این اتفاق مجدداً تکرار می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که دوره تناوب مداری برابر است با:

$$T=t_5-t_1=2/411days=2/08\times 10^{5}s$$

طبق صورت مسئله داریم که t_n-t_{n-1}، مقدار ثابتی است، بنابراین می‌توان مدار را دایروی در نظر گرفت. بنابراین سرعت زاویه‌ای گردش دو جسم به دور مرکز جرم ثابت است؛ پس داریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\simeq 3\times 10^{-5}s^{-1}$$

از طرفی با توجه به اثر دوپلر داشتیم: $\frac{v_r}{c}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\circ}$ پس در بازه‌های زمانی (1-بیشینه) و (2-بیشینه) می‌توان نوشت:

$$\frac{v_1}{c}=\frac{\Delta\lambda_{1-\max}}{\lambda_\circ}\Rightarrow v_1\simeq 1/43\times 10^{3}kms^{-1}\qquad,\qquad \frac{v_2}{c}=\frac{\Delta\lambda_{2-\max}}{\lambda_\circ}\Rightarrow v_2=428/7km/s$$

از طرفی در سامانه‌های دوتایی داریم: $\frac{M_1}{M_2}=\frac{v_2}{v_1}$ و با توجه به فرض مسئله ستاره‌ی کوچک‌تر هم جرم خورشید است، پس داریم:

$$M_1=M_\odot\Rightarrow M_2=M_\odot\frac{v_1}{v_2}=6/64\times 10^{30}kg$$

برای محاسبه نیم قطر بزرگ مدار هم، از قانون سوم کپلر استفاده می‌کنیم.

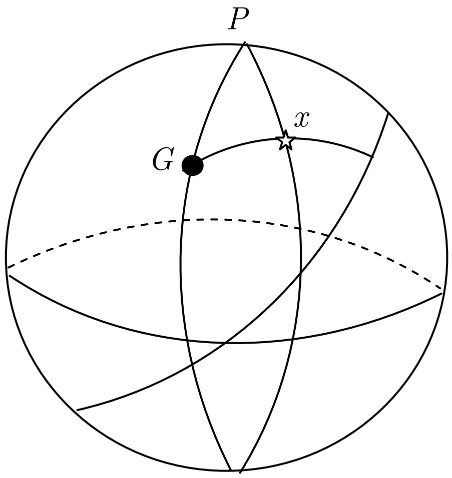
$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1+M_2)} \Rightarrow$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{GP^2(m_1+m_2)}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(6/67\times 10^{-11})(2/08\times 10^{5})^2(1/99\times 10^{30}+6/64\times 10^{30})}{4\pi^2}} = 8/5\times 10^{8} m$$

می‌دانیم که $t_n - t_{n-1}$ ثابت است، بنابراین

$$t_2 = t_1 + \frac{P}{5} = 2443546/345 + \frac{2/411}{5} = 2443546/827$$

$$t_4 = t_1 + 4\frac{P}{5} \Rightarrow 2443546/345 + 4\frac{2/411}{5} = 2443548/273$$



8) این سؤال دقیقاً مشابه تبدیلِ دستگاه‌های مختصاتی اســت که احتمالاً تاکنون بارها با آن مواجه شده‌اید، برای حل این سؤال ابتدا باید دستگاه‌هــای مختصات بعد و میل (که مختصات‌ها برحسب آن بیان شده‌اند) و دستــگاه طــول و عرض کهکشانی را بر سطح یک کره سماوی نمایش دهیم.

برای انی کار مختصات قطب دستگاه مختصات کهکشانی را بر سطح کره معیـــــن می‌کنیم.

نقطه‌ی دیگری که در متن سؤال از آن نام برده شده، نقطه‌ای ست بر روی دایــره‌ی عظیمه‌ی مرجع این دستگاه مختصات که مقادیر طول را برحسب فاصله‌شــان از آن اندازه‌گیری می‌شوند (l_N). حال باید ستاره‌ای فرضی با مختصات δ_x, α_x معلــوم را در نظر بگیریم که باید آن‌ها را به l_x, b_x تبدیل کنیم. در مثلث کروی PGX مقادیر ذیل معلومند:

$$PG = 90 - \delta_G \qquad Px = 90 - \delta_x \qquad P = GPx = \alpha_G - \alpha_x$$

و مقادیر ذیل مجهولات و مطلوبات مسئله هستند:

$$Gx = 90 - b_x \qquad G = PGx = l_n - l_x$$

با استفاده از قانون سینوس‌ها می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{\sin P}{\sin Gx} = \frac{\sin G}{\sin Px} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha_G - \alpha_x)}{\sin(90 - b_x)} = \frac{\sin(l_n - l_x)}{\sin(90 - \delta_x)}$$

با طرفین وسطین و تبدیل عبارت‌های مثلثاتی حاصل داریم:

$$\sin(l_n - l_x)\cos b = \cos\delta.\sin(\alpha_G - \alpha_x)$$

از طرفی می‌توانیم قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع Gx از همین مثلث چنین بنویسیم:

$$\cos Gx = \cos GP.\cos Px + \sin GP.\sin Px.\cos P$$

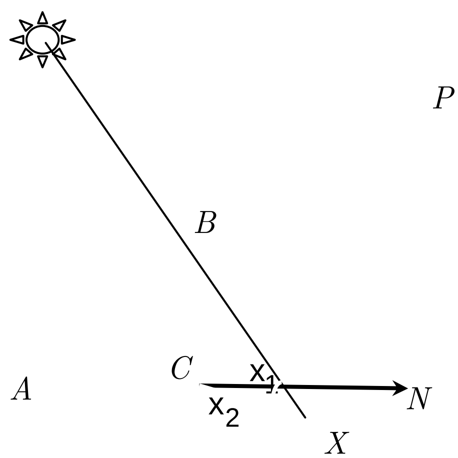
با جایگذاری مقادیر معادل خواهیم داشت:

$$\sin b_x = \sin\delta_G.\sin\delta_x + \cos\delta_G.\cos\delta_x.\cos(\alpha_G - \alpha_x)$$

و در نهایت برای استخراج رابطه‌ی مربع دوم از رابطه‌ی قیاسی استفاده می‌نماییم.

$$\cos Gx.\sin Gx = CosPx.\sin PG - \sin Px.\cos PG.\cos GPx$$

$$\cos(l_n - l_x)\cos b = \sin\delta_x \cos\delta_G - \cos\delta_x \sin\delta_G \cos(\alpha_G - \alpha_x)$$



9 در ابتدا فرض می‌کنیم که مختصات خورشید را در یک لحظه‌ی معین برابر a و A اندازه گیری کرده‌ایم.

بنابراین زاویه‌ی x_1 برابر ارتفاع خورشید (a) در این لحظه خواهد شد. پس می‌توانیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCD چنین بنویسیم:

$$\tan x_1 = \frac{BC}{CX} \Rightarrow BC = CX \tan x_1$$

از طرفی خودِ شاخص هم مثلثی قائم‌الزاویه است، پس در مثلث ABC می‌توانیم بنویسیم:

$$\tan\varphi = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC\tan\varphi$$

از برابر قرار دادن مقدار BC در دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت: (I) $\quad AC\tan\varphi = CX\tan x_1 \Rightarrow AC\tan\varphi = CX\tan a_\odot$

از طرف دیگر در مثلث ACX زاویه ACX با سمت خورشید برابر است. پس در همین مثلث قضیه سینوس‌ها (در مثلث مسطحه) را چنین خواهیم نوشت:

$$\frac{\sin\gamma}{CX} = \frac{\sin x_2}{AC}$$

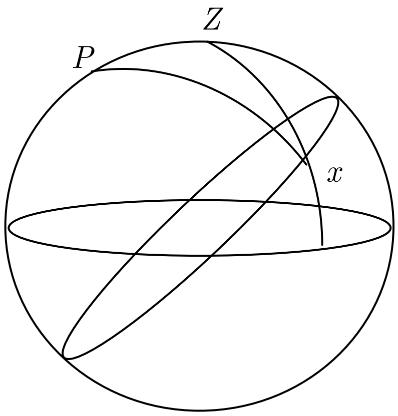
و از آنجا که در مثلث مسطحه‌ی ACX داریم $x_2 = 180 - (\gamma + A_\odot)$ رابطه را بدین شکل خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\gamma}{CX} = \frac{\sin(180 - (\gamma + A_\odot))}{AC} \Rightarrow \frac{\sin(\gamma + A_\odot)}{\sin\gamma} = \frac{AC}{CX}$$

و از برابر نهی این رابطه با آنچه از قسمت (I) بدست آوردیم، چنین خواهیم داشت:

$$\frac{\sin(\gamma + A_\odot)}{\sin\gamma} = \frac{\tan a}{\tan\varphi} \quad\Rightarrow\quad \cos A_\odot + \cot\gamma\sin A_\odot = \frac{\tan a}{\tan\varphi} \;\Rightarrow\; \cot\gamma = \frac{\dfrac{\tan a}{\tan\varphi} - \cos A_\odot}{\sin A_\odot} \quad (II)$$

حال باید مقدار سمت و ارتفاع خورشید را برای ساعت‌های مختلف روز بدست آوریم تا بعد از جایگذاری در این معادله به عبارتی برای محاسبه‌ی γ دست پیدا کنیم.



در مثلث PZx قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع ارتفاع می‌نویسیم:

$$\cos(90 - a_{\odot}) = \cos 90 \cos(90 - \varphi) + \sin 90 \sin(90 - \varphi)\cos H \Rightarrow$$

$$\sin a_{\odot} = \sin\varphi \cos H \quad (III)$$

حال قضیه‌ی سینوس‌ها را برای زاویه‌ی سمت می‌نویسیم:

$$\frac{\sin A_{\odot}}{\sin 90} = \frac{\sin H}{\sin(90 - a_{\odot})} \Rightarrow \sin A_{\odot} = \frac{\sin H}{\cos a_{\odot}} \quad (IV)$$

با ضرب طرفین دو رابطه‌ی اخیر داریم:

$$\tan a_{\odot} \sin H = \sin\varphi \sin A_{\odot} \cos H \Rightarrow \tan a_{\odot} = \sin\varphi \sin A_{\odot} \cot H$$

حال این مقدار ارتفاع را در رابطه‌ی (II) جایگزین می‌کنیم:

$$\cot\gamma = \frac{\dfrac{\sin\varphi \sin A_{\odot} \cot H}{\tan\varphi} - \cos A_{\odot}}{\sin A_{\odot}} = \frac{\cos\varphi \sin A_{\odot} \cot H - \cos A_{\odot}}{\sin A_{\odot}} = \cos\varphi \cot H - \cot A_{\odot}$$

و برای محاسبه‌ی مقدار $\cot A_{\odot}$ داریم:

$$\cot^2 A_{\odot} = \frac{1}{\sin^2 A_{\odot}} - 1$$

و از رابطه‌ی (IV) هم داشتیم $\sin A_{\odot} = \dfrac{\sin H}{\cos a_{\odot}}$ در نتیجه:

$$\cot A_{\odot} = \sqrt{\frac{\cos^2 a_{\odot}}{\sin^2 H} - 1}$$

و از رابطه‌ی (III) داشتیم: $\sin a_{\odot} = \sin\varphi \cos H$ بنابراین: $\cos a_{\odot} = \sqrt{1 - \sin^2\varphi \cos^2 H}$ و در آخر:

$$\cot A_{\odot} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2\varphi \cos^2 H}{\sin^2 H} - 1}$$

حال با جایگذاری این مقدار برای زاویه‌ی مطلوب داریم:

$$\cot\gamma = \cos\varphi \cot H - \sqrt{\frac{1 - \sin^2\varphi \cos^2 H}{\sin^2 H} - 1} = \cos\varphi \cot H - \sqrt{\frac{\cos^2 H}{\sin^2 H} - \sin^2\varphi \frac{\cos^2 H}{\sin^2 H}}$$

$$\cot\gamma = \cos\varphi \cot H \pm \cot H \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cot\gamma = 2\cos\varphi \cot H$$

که در آن H زاویه‌ی ساعتی خورشید است که به سادگی با زمان محلی ارتباط پیدا می‌کند.