بسم الله الرحمن الرحیم

مسئله تغییر جرم در دوتایی‌ها

امیررضا قدیانی

کسری حاجیان

امیرحسین امیری

چهاردهمین تیم ملی المپیاد نجوم و اخترفیزیک ایران

چشم‌انداز

بررسی حرکت اجسام تحت تاثیر عوامل مختلف، همیشه از مسائل مورد توجه مکانیک و دینامیک بوده است و احتمالا تا کنون مسائلی مربوط به حرکت اجسام حل کرده‌اید. طبق اساس مکانیک کلاسیک، بررسی حرکت اجسام از نیروی وارده به اجسام شروع می‌شود. در آسمان، گرانش حرف اول را می‌زند و می‌توان تقریبا از تاثیرات دیگر نیرو ها صرف نظر کرد. گرانش برای یک ذره منفرد معنایی ندارد و حضور ذرات دیگر است که باعث ایجاد نیرو می‌شود. هر دو ذره جرم‌دار در آسمان به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند و ممکن است به دلیل این نیرو، به یکدیگر مقید شوند و تشکیل یک سیستم پایدار بدهند.

همچنین در ادامه ممکن است این سیستم دچار تغییراتی شود که عمده‌ترین تغییرات واقعی سیستم‌ها در طبیعت، تغییر جرم اعضای سیستم است. هدف کلی ما در این جزوه این است که ابتدا معادلات را برای یک سیستم دوتایی بنویسیم و حرکت ذرات را بررسی کنیم و سپس با مدل‌سازی‌هایی برای تغییرات جرم چند حالت را حل کنیم و تغییرات سیستم را بدست بیاوریم. در بخش اول به سراغ حل کلی برای مسئله دو جسم گرانشی می‌رویم.

سیستم های دوتایی گرانشی اهمیت زیادی در مکانیک سماوی و حتی اخترفیزیک و به طور کلی دیگر بخش های نجوم دارند.

بررسی کلی مسئله دوجسم

می‌دانیم که درصد قابل توجهی از ستارگانی که مشاهده می‌کنیم دوتایی هستند یا به طور دقیق تر به دلیل گرانش یکدیگر تشکیل یک سیستم دوتایی داده‌اند. همچنین با استفاده از معادلات می‌توان گفت اگر انرژی مکانیکی سیستم منفی باشد، سیستم مقید خواهد بود و دو جسم در مدار های دایره یا بیضی به دور مرکز جرم مشترک‌شان نوسان می‌کنند. حل کلی مسئله دو جسم به صورت مجزا راه خوبی نیست برای همین ما سعی می‌کنیم مسائل دوجسم را با یک جایگزین تک جسمی مدل کنیم. که در این مسئله این کار را بدین گونه انجام می‌دهیم که یک جسم با جرمی موسوم به جرم کاهیده حول یک جسم با جرم مجموع دوتایی دوران می‌کند. اکثر دانش آموزان با این مدل سازی آشنایی دارند اما با دلیل پشت این کار آشنایی کافی ندارند.

بیایید معادلات دینامیکی یک سیستم دو جسمی شامل $m_۱$ و $m_۲$ را بررسی کنیم. ابتدا باید معادلات حرکت را از دید یک چارچوب لخت بنویسیم. طبق تعریف برای مرکز جرم داریم: (بردار $\vec{R}$ نسبت به یک چارچوب لخت است.)

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_۱\vec{R}_۱ + m_۲\vec{R}_۲}{m_۱ + m_۲}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{m_۱\dot{\vec{R}}_۱ + m_۲\dot{\vec{R}}_۲}{m_۱ + m_۲}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = \frac{m_۱\ddot{\vec{R}}_۱ + m_۲\ddot{\vec{R}}_۲}{m_۱ + m_۲}$$

با توجه به قانون سوم نیوتون داریم:

$$\vec{F}_{۱۲} = -\vec{F}_{۲۱}$$

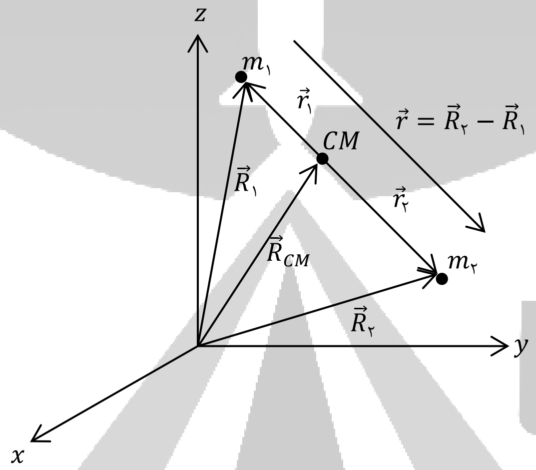
$$\vec{F}_{12} = m_1\ddot{\vec{R}}_1 \quad , \quad \vec{F}_{21} = m_2\ddot{\vec{R}}_2$$

$$\Rightarrow m_1\ddot{\vec{R}}_1 = -m_2\ddot{\vec{R}}_2 \Rightarrow m_1\ddot{\vec{R}}_1 + m_2\ddot{\vec{R}}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = cte$$

پس شتاب مرکز جرم صفر است و لذا دستگاه مختصات منطبق بر مرکز جرم لخت می‌باشد. معادلات را در دستگاه مرکز جرم می‌نویسیم. فرض می‌کنیم، نیرو تابعی برداری مانند زیر باشد (گرانش، کولنی):

$$\vec{F}_{21} = \frac{k}{r^2}\hat{r} = \frac{k}{r^3}\vec{r}$$



که در آن $\vec{r}$ بردار نسبی است:

$$\vec{r} \equiv \vec{R}_2 - \vec{R}_1$$

بردار دو جسم از نظر مرکز جرم را تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r}_1 \equiv \vec{R}_1 - \vec{R}_{CM} \quad , \quad \vec{r}_2 \equiv \vec{R}_2 - \vec{R}_{CM}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 \equiv \dot{\vec{R}}_1 - \dot{\vec{R}}_{CM} \quad , \quad \dot{\vec{r}}_2 \equiv \dot{\vec{R}}_2 - \dot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{R}}_1 - 0 = \ddot{\vec{R}}_1 \quad , \quad \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{R}}_2 - 0 = \ddot{\vec{R}}_2$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \quad , \quad \vec{F}_{21} = m_2\ddot{\vec{r}}_2$$

اما بردار مرکز جرم از دید خود مرکز جرم صفر است: (منظور از $\vec{R}x_{/y}$ بردار x از دید y است.)

$$\vec{R}_{CM/CM} = 0 \Rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2 \quad , \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_۲ + \frac{m_۲}{m_۱}\vec{r}_۲ = \left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۱}\right)\vec{r}_۲$$

$$\Rightarrow \vec{r} = -\frac{m_۱}{m_۲}\vec{r}_۱ - \vec{r}_۱ = -\left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۲}\right)\vec{r}_۱$$

حال رابطه بدست آمده برای $\vec{r}_۱$ و $\vec{r}_۲$ را در معادله دینامیکی هر یک جایگذاری می‌کنیم:

$$\vec{F}_{۱۲} = m_۱\ddot{\vec{r}}_۱ = -\frac{k}{r^۳}\vec{r} = k\left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۲}\right)^{-۳}\frac{۱}{r_۱^۳}\left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۲}\right)\vec{r}_۱$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_۱ = \left(\frac{۱}{m_۱}\left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۲}\right)^{-۲} k\right)\frac{\vec{r}_۱}{r_۱^۳} = k_۱\ \frac{\vec{r}_۱}{r_۱^۳}$$

$$k_۱ \equiv \frac{۱}{m_۱}\ \frac{m_۲^۲}{(m_۱ + m_۲)^۲}k$$

$$\vec{F}_{۲۱} = m_۲\ddot{\vec{r}}_۲ = \frac{k}{r^۳}\vec{r} = k\left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۱}\right)^{-۳}\frac{۱}{r_۲^۳}\left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۱}\right)\vec{r}_۲$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_۲ = \left(\frac{۱}{m_۲}\left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۱}\right)^{-۲} k\right)\frac{\vec{r}_۲}{r_۲^۳} = k_۲\ \frac{\vec{r}_۲}{r_۲^۳}$$

$$k_۲ \equiv \frac{۱}{m_۲}\ \frac{m_۱^۲}{(m_۱ + m_۲)^۲}k$$

پس معادله برداری به صورت زیر را باید برای هر مولفه حل کنیم:

$$\ddot{\vec{r}}_i = k_i\ \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳}$$

$$k_i \equiv \frac{۱}{m_i}\ \frac{m_j^۲}{\left(m_i + m_j\right)^۲}k$$

ابتدا جواب این معادله برداری را می‌یابیم و سپس ثابت k_i را جایگذاری می‌کنیم:

$$\ddot{\vec{r}}_i = k_i\ \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳}$$

ابتدا یک ثابت حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{h}_i \equiv \frac{\vec{L}_i}{m_i} = \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

$$\dot{\vec{h}}_i = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right) = \left(\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right) + \left(\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i\right) = ۰ + \vec{r}_i \times \left(k_i\ \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \vec{h}_i = cte$$

چون تکانه زاویه‌ای حرکت ثابت است، پس حرکت در یک صفحه باقی می‌ماند. حال دو طرف معادله شتاب را در $\vec{h}_i$ ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\ddot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i = k_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳} \times \vec{h}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i\right) = \ddot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{h}}_i = \ddot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i + ۰$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i\right) = k_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳} \times \vec{h}_i$$

برای ساده سازی سمت راست معادله بالا مطابق زیر از روابط برداری استفاده می‌کنیم:

قاعده بک‌کب: $$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

می‌توانید به عنوان تمرین قاعده بک‌کب را اثبات کنید، برای این‌کار از نمادگذاری $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ استفاده کنید و نشان دهید دو سمت معادله برابر هستند. همچنین:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}^۲) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{d}{dt}(r^۲)$$

$$\Rightarrow ۲\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = ۲r\dot{r}$$

توجه داشته باشید که $\dot{\vec{r}}$ کل بردار سرعت است و $\dot{r}$ تنها اندازه مولفه شعاعی سرعت است. پس:

$$\frac{\vec{r}_i}{r_i^۳} \times \vec{h}_i = \frac{۱}{r_i^۳}\left(\vec{r}_i \times \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right) = \frac{۱}{r_i^۳}\left(\vec{r}_i\left(\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\right) - \dot{\vec{r}}_i\left(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳} \times \vec{h}_i = \frac{۱}{r_i^۳}\left(\vec{r}_i\left(r_i\dot{r}_i\right) - \dot{\vec{r}}_i\left(r_i^۲\right)\right) = \frac{\vec{r}_i\dot{r}_i - \dot{\vec{r}}_i r_i}{r_i^۲}$$

اما این عبارت را می‌توان ساده کرد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}_i r_i - \vec{r}_i\dot{r}_i}{r_i^۲} = -\frac{\vec{r}_i\dot{r}_i - \dot{\vec{r}}_i r_i}{r_i^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳} \times \vec{h}_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i\right) = -k_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i + k_i \frac{\vec{r}_i}{r_i}\right) = ۰ \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i + k_i \frac{\vec{r}_i}{r_i} = cte \equiv \vec{C}_i$$

با توجه به ابعاد $\vec{C}_i$ بردار بی بعد $\vec{e}_i$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{e}_i \equiv \frac{\vec{C}_i}{k_i} = \frac{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i}{k_i} + \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

بردار $\vec{e}_i$ به بردار خروج از مرکز معروف است. حال هر دو طرف معادله را در $\vec{r}_i$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\vec{r}_i \cdot \vec{e}_i = \vec{r}_i \cdot \left(\frac{\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i}{k_i}\right) + \vec{r}_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \frac{\vec{r}_i \cdot (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i)}{k_i} + \frac{r_i^۲}{r_i}$$

زاویه بین بردار $\vec{r}_i$ و $\vec{e}_i$ را θ تعریف می‌کنیم و همچنین می‌دانیم:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\Rightarrow e_i r_i \cos(\theta) - r_i = \frac{\vec{r}_i \cdot (\dot{\vec{r}}_i \times \vec{h}_i)}{k_i} = \frac{(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) \cdot \vec{h}_i}{k_i} = \frac{h_i^۲}{k_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_i(\theta) = \frac{\frac{h_i^۲}{k_i}}{e_i \cos(\theta) - ۱}}$$

که رابطه r_i برحسب θ که زاویه‌ای است که از راستای بردار خروج از مرکز ($\vec{e}_i$) اندازه گیری می‌شود، بدست آمد. این معادله با توجه به علامت k و اندازه e_i معادله قطبی مقاطع مخروطی مختلف می‌تواند باشد. به e_i خروج از مرکز مقطع مخروطی می‌گویند (پس نام بردار خروج از مرکز را بی‌دلیل هم انتخاب نکردیم!). همچنین به راستایی که θ از آن سنجیده می‌شود راستای حضیض می‌گویند که همان جهت بردار خروج از مرکز است.

نکته قابل توجه این است که این معادله صرفا از معادله $\ddot{\vec{r}}_i = k_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^۳}$ با شرط ثابت ماندن تکانه زاویه‌ای واحد جرم هر یک از ذرات بدست آمد، پس اگر یک سیستم N جسمی داشته باشیم که نیروهایی به این شکل به یکدیگر وارد کنند به صورتی که تکانه زاویه‌ای هر یک از اجسام ثابت بماند (راستا $\sum_j \vec{F}_{ij}$ برای هر ذره i در راستای شعاعی باشد.)، آنگاه مسیر هر یک از ذرات حول مرکز جرم سیستم یک مقطع مخروطی است.

حال معادله را برای جرم ۱ و ۲ می‌نویسیم و k هرکدام را جایگذاری می‌کنیم:

$$r_۱(\theta) = \frac{\frac{h_۱^۲}{k_۱}}{e_۱ \cos(\theta) - ۱} = \frac{\frac{h_۱^۲}{k}\frac{(m_۱ + m_۲)^۲}{m_۲^۲} m_۱}{e_۱ \cos(\theta) - ۱}$$

$$r_۲(\theta') = \frac{\frac{h_۲^۲}{k_۲}}{e_۲ \cos(\theta') - ۱} = \frac{\frac{h_۲^۲}{k}\frac{(m_۱ + m_۲)^۲}{m_۱^۲} m_۲}{e_۲ \cos(\theta') - ۱}$$

از طرفی طبق معادلات مربوط به مرکز جرم می‌دانیم: $\frac{r_1}{r_2}=\frac{m_2}{m_1}$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{\frac{h_1^2}{k}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_2^2}m_1}{e_1\cos(\theta)-1}}{\frac{\frac{h_2^2}{k}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2}m_2}{e_2\cos(\theta')-1}}=\frac{m_2}{m_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\frac{h_1^2}{k}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_2^2}m_1}{e_1\cos(\theta)-1}}{\frac{\frac{h_2^2}{k}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2}m_2}{e_2\cos(\theta')-1}}=\frac{\frac{\frac{h_1^2}{m_2^2}m_1}{e_1\cos(\theta)-1}}{\frac{\frac{h_2^2}{m_1^2}m_2}{e_2\cos(\theta')-1}}=\frac{e_2\cos(\theta')-1}{e_1\cos(\theta)-1}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^3=\frac{m_2}{m_1}$$

و همچنین برای تکانه زاویه‌ای:

$$\vec{r}_1=-\frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2\ \ ,\ \ \dot{\vec{r}}_1=-\frac{m_2}{m_1}\dot{\vec{r}}_2$$

$$\vec{h}_1=\vec{r}_1\times\dot{\vec{r}}_1=\left(-\frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2\right)\times\left(-\frac{m_2}{m_1}\dot{\vec{r}}_2\right)=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2(\vec{r}_2\times\dot{\vec{r}}_2)$$

$$\Rightarrow \vec{h}_1=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\vec{h}_2$$

پس بردار تکانه زاویه‌ای هر دو جرم در یک جهت هستند و نسبت $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2$ دارند. به‌صورت شهودی هم‌جهت بودن بردار تکانه زاویه‌ای را می‌توان از هم‌جهت بودن چرخش دو مولفه به علت هم خط ماندن m_1 و m_2 و مرکزجرم نتیجه‌گیری کرد.

$$\Rightarrow \frac{e_2\cos(\theta')-1}{e_1\cos(\theta)-1}\left(\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right)^2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^3=\frac{m_2}{m_1}$$

$$\Rightarrow \frac{e_2\cos(\theta')-1}{e_1\cos(\theta)-1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)=\frac{m_2}{m_1}$$

$$e_2\cos(\theta')-1=e_1\cos(\theta)-1$$

$$\Rightarrow e_2\cos(\theta')=e_1\cos(\theta)\qquad (*)$$

همچنین طبق تعریف k_1 و k_2 داریم:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{1}{m_1}\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}k}{\frac{1}{m_2}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}k}=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^3$$

حال با توجه به تعریف بردار $\vec{e}$ داریم:

$$\vec{e}_1 = \frac{\dot{\vec{r}}_1 \times \vec{h}_1}{k_1} + \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \left(\frac{-\frac{m_2}{m_1}\dot{\vec{r}}_2 \times \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \vec{h}_2}{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^3 k_2} + \frac{-\frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2}{\frac{m_2}{m_1} r_2} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_1 = -\left(\frac{\dot{\vec{r}}_2 \times \vec{h}_2}{k_2} + \frac{\vec{r}_2}{r_2} \right) = -\vec{e}_2$$

به این نتیجه رسیدیم که اندازه بردار خروج از مرکز دو جسم برابر و جهت آن ها مخالف یکدیگر است. از $(*)$ داریم:

$$e \equiv e_1 = e_2$$

$$(*) \Rightarrow e\cos(\theta') = e\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta') = \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \theta' = \pm\theta$$

دو حرکت حول مرکز جرم داریم که هر دو جسم باید در دو راستا مقابل هم باقی بمانند پس زاویه آنها از دو راستای حضیض آنها که مقابل هم قرار دارد هم باید مساوی باشد و اگر منفی یکدیگر باشد آن دو جسم بر روی یک خط قرار نمی‌گیرند. پس:

$$\Rightarrow \theta' = \theta$$

و معادلات کلی حرکت هر یک از اجرام از دید مرکز جرم:

$$\boxed{\vec{e}_1 = -\vec{e}_2 = \frac{\dot{\vec{r}}_1 \times \vec{h}_1}{k_1} + \frac{\vec{r}_1}{r_1}}$$

$$\boxed{r_1(\theta) = \frac{\frac{h_1^2}{k}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_2^2} m_1}{e\cos(\theta) - 1}} \quad , \quad \boxed{r_2(\theta) = \frac{\frac{h_2^2}{k}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2} m_2}{e\cos(\theta) - 1}}$$

$$\boxed{\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2} \ , \ \boxed{\dot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\dot{\vec{r}}_2}$$

مسئله معادل، حرکت نسبی و جرم‌کاهیده

حال بیایید معادلات حرکت نسبی را بنویسیم:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m_2}\frac{k}{r^3}\vec{r} - \frac{1}{m_1}\left(-\frac{k}{r^3}\vec{r}\right) = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)\frac{k}{r^3}\vec{r}$$

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)\ddot{\vec{r}} = \frac{k}{r^3}\vec{r}$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = \frac{k}{r^3}\vec{r}$$

معادلات به شکلی شد که گویا جسمی به جرم μ تحت نیروی $\frac{k}{r^3}\vec{r}$ حرکت می‌کند. ما به μ جرم کاهیده می‌گوییم. پس برای مدار نسبی:

$$k_{rel} = \frac{k}{\mu}$$

$$\frac{d(\vec{h}_{rel})}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{rel} \times \dot{\vec{r}}_{rel}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 + \vec{r} \times \left(\frac{k}{\mu r^3}\vec{r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{h}_{rel} = cte = \left(-\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)\vec{r}_1\right) \times \left(-\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)\dot{\vec{r}}_1\right) = \left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)^2 \vec{h}_1 \equiv \vec{h}$$

$$\Rightarrow \vec{h} = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 \vec{h}_2$$

با توجه به ثابت ماندن تکانه زاویه‌ای حل معادله برداری مانند قبل است:

$$r(\theta'') = \frac{\frac{\mu h^2}{k}}{e_{rel}\cos(\theta'') - 1}$$

و بردار خروج از مرکز:

$$\vec{e}_{rel} = \left(\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\frac{k}{\mu}} + \frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(\frac{\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\dot{\vec{r}}_2 \times \left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 \vec{h}_2}{\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)k} + \frac{\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\vec{r}_2}{\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{rel} = \left(\frac{\dot{\vec{r}}_2 \times \vec{h}_2}{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{1}{m_2}k} + \frac{\vec{r}_2}{r_2}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}_2 \times \vec{h}_2}{k_2} + \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

$$\vec{e} \equiv \vec{e}_{rel} = \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

پس اندازه خروج از مرکز مدار نسبی برابر خروج از مرکز هر یک از دو جسم است و لذا مدار ۲ از دید ۱ و برعکس مشابه مدار ها حول مرکز جرم است و صرفا مقیاس آن تغییر کرده‌است. چون بردار خروج از مرکز مدار نسبی با بردار خروج از مرکز مدار ۲ برابر است و راستا بردار نسبی در جهت بردار ۲ از دید مرکز جرم است پس زاویه بین این دو باهم برابر است:

$$\hat{e} = \hat{e}_2 \quad , \quad \hat{r} = \hat{r}_2$$

$$\Rightarrow \theta'' = \theta' = \theta$$

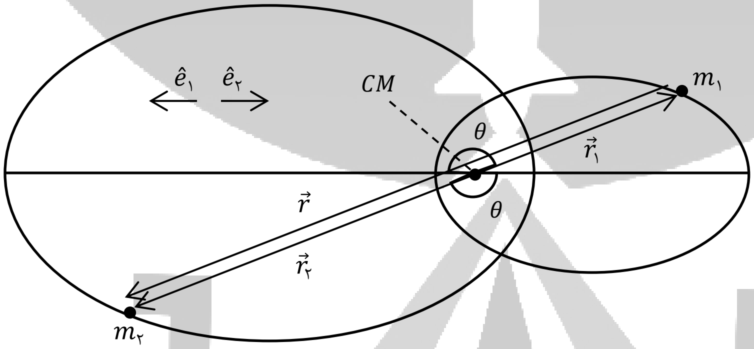
چون راستا $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ مخالف یکدیگر است، برای طول r داریم:

$$r = r_1 + r_2$$

که رابطه بالا توسط روابط $r_1(\theta)$ و $r_2(\theta)$ و $r(\theta)$ نیز قابل اثبات است. رابطه نهایی برای مدار نسبی:

$$\Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{\frac{\mu h^2}{k}}{e\cos(\theta) - 1}}$$

در شکل زیر حرکت را از دید مرکز جرم و همچنین بردار اجسام و بردارنسبی را رسم کرده‌ایم. این شکل مدار بیضوی را نشان می‌دهد:



همچنین رابطه ای برای تکانه زاویه ای سیستم پیدا می‌کنیم:

$$\vec{L}_{sys} = m_1\vec{h}_1 + m_2\vec{h}_2 = m_1\vec{h}_1 + m_2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\vec{h}_1$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{sys} = m_1\vec{h}_1 + m_2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\vec{h}_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)m_1\vec{h}_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\vec{h}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{sys} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{h} = \mu\vec{h}}$$

که به رابطه بسیار جالبی رسیدیم. حال باید رابطه ای برای انرژی مکانیکی کل سیستم بیابیم. ابتدا شتاب هر یک از اجرام را در سرعت آن ضرب داخلی می‌کنیم:

$$m_1\ddot{\vec{R}}_1 \cdot \dot{\vec{R}}_1 = -\frac{k}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{2}\left|\dot{\vec{R}}_1\right|^2\right)$$

$$m_2\ddot{\vec{R}}_2 \cdot \dot{\vec{R}}_2 = \frac{k}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_2}{2}\left|\dot{\vec{R}}_2\right|^2\right)$$

دو طرف معادله را جمع می‌بندیم:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{2}\left|\dot{\vec{R}}_1\right|^2 + \frac{m_2}{2}\left|\dot{\vec{R}}_2\right|^2\right) = -\frac{k}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}_1 + \frac{k}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}_2 = \frac{k}{r^3}\vec{r} \cdot \left(\dot{\vec{R}}_2 - \dot{\vec{R}}_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m_۱}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲ + \frac{m_۲}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲\right) = \frac{k}{r^۳}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{k}{r^۲}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{k}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_۱}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲ + \frac{m_۲}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲ + \frac{k}{r}\right) = ۰$$

عبارت $\frac{m_۱}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲ + \frac{m_۲}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲$ انرژی جنبشی سیستم و $\frac{k}{r}$ انرژی پتانسیل سیستم است پس انرژی مکانیکی سیستم پایسته است:

$$K_{sys} \equiv \frac{m_۱}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲ + \frac{m_۲}{۲}\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲ \qquad , \qquad U_{sys} \equiv \frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{sys} = K_{sys} + U_{sys} = cte}$$

حال رابطه سرعت هر یک از اجرام را در دستگاه مرکز جرم جایگذاری می کنیم و رابطه جدیدی برای انرژی مکانیکی سیستم بدست می آوریم:

$$\dot{\vec{R}}_i = \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{R}}_{CM} \qquad , \qquad M \equiv m_۱ + m_۲$$

$$K_{sys} = \frac{۱}{۲}m_۱\left|\dot{\vec{r}}_۱ + \dot{\vec{R}}_{CM}\right|^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲\left|\dot{\vec{r}}_۲ + \dot{\vec{R}}_{CM}\right|^۲$$

$$K_{sys} = \frac{۱}{۲}m_۱\left(\left|\dot{\vec{r}}_۱\right|^۲ + \left|\dot{\vec{R}}_{CM}\right|^۲ + ۲\dot{\vec{r}}_۱\cdot\dot{\vec{R}}_{CM}\right) + \frac{۱}{۲}m_۲\left(\left|\dot{\vec{r}}_۲\right|^۲ + \left|\dot{\vec{R}}_{CM}\right|^۲ + ۲\dot{\vec{r}}_۲\cdot\dot{\vec{R}}_{CM}\right)$$

$$\Rightarrow K_{sys} = \frac{۱}{۲}m_۱\left|\dot{\vec{r}}_۱\right|^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲\left|\dot{\vec{r}}_۲\right|^۲ + \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)\left|\dot{\vec{R}}_{CM}\right|^۲ + (m_۱\dot{\vec{r}}_۱ + m_۲\dot{\vec{r}}_۲)\cdot\dot{\vec{R}}_{CM}$$

اما قبلا اثبات کردیم در دستگاه مرکز جرم $m_۱\dot{\vec{r}}_۱ + m_۲\dot{\vec{r}}_۲ = ۰$ و همچنین نمادگذاری زیر را اختیار می‌کنیم:

$$v_۱^۲ \equiv \left|\dot{\vec{r}}_۱\right|^۲$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{sys} = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ + \frac{۱}{۲}MV_{CM}^۲}$$

$$\boxed{K_{sys} = K_۱ + K_۲ + K_{CM}}$$

اکنون باید رابطه‌ای متناظر برای مدار نسبی بیابیم:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \frac{k}{r^۳}\vec{r}$$

$$\Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{k}{r^۳}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{۲}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right) = \frac{k}{r^۳}r\dot{r} = \frac{k}{r^۲}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{k}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{v^۲}{۲}+\frac{k}{\mu r}\right)=۰$$

$$\Rightarrow \varepsilon \equiv \frac{v^۲}{۲}+\frac{k}{\mu r}=cte$$

به ε انرژی مکانیکی واحد جرم می گویند. حال باید بررسی کنیم و ببینم با ضرب انرژی مکانیکی واحد جرم در جرم کاهیده چه اتفاقی می افتد:

$$E \equiv \mu\varepsilon = \frac{\mu v^۲}{۲}+\frac{k}{r} \quad , \quad \frac{k}{r}=U_{sys}$$

$$\frac{\mu v^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{m_۱ m_۲}{m_۱+m_۲}\right)\left|\dot{\vec{r}}\right|^۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{m_۱ m_۲}{m_۱+m_۲}\right)\left|\dot{\vec{R}}_۲-\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲$$

$$\Rightarrow \frac{\mu v^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{m_۱ m_۲}{m_۱+m_۲}\right)\left(\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲+\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲-۲\dot{\vec{R}}_۲\cdot\dot{\vec{R}}_۱\right)$$

همچنین می دانیم:

$$M\vec{V}_{CM}=m_۱\dot{\vec{R}}_۱+m_۲\dot{\vec{R}}_۲ \Rightarrow M^۲V_{CM}^۲=m_۱^۲\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲+m_۲^۲\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲+۲m_۱m_۲\dot{\vec{R}}_۱\cdot\dot{\vec{R}}_۲$$

$$\Rightarrow ۲\dot{\vec{R}}_۲\cdot\dot{\vec{R}}_۱=\frac{M^۲V_{CM}^۲-m_۱^۲\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲-m_۲^۲\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲}{m_۱m_۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu v^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{m_۱m_۲}{M}\right)\left(\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲+\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲-\frac{M^۲V_{CM}^۲-m_۱^۲\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲-m_۲^۲\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲}{m_۱m_۲}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu v^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{M}\right)\left(m_۱m_۲\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲+m_۱m_۲\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲-M^۲V_{CM}^۲+m_۱^۲\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲+m_۲^۲\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu v^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\frac{۱}{M}\left(m_۱\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲(m_۱+m_۲)+m_۲\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲(m_۱+m_۲)-M^۲V_{CM}^۲\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu v^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(m_۱\left|\dot{\vec{R}}_۱\right|^۲+m_۲\left|\dot{\vec{R}}_۲\right|^۲-MV_{CM}^۲\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu v^۲}{۲}=K_{sys}-K_{CM}$$

$$\Rightarrow \boxed{E=K_{sys}-K_{CM}+U_{sys}}$$

پس $\frac{\mu v^۲}{۲}$ انرژی جنبشی نسبت به مرکز جرم و $E=\mu\varepsilon$ انرژی مکانیکی نسبت به مرکز جرم است.

دقت کنید که برای گرانش: $k=-Gm_۱m_۲$ و برای نیروی کولنی: $k=\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}$

مسائل تغییر جرم

اکنون که یک بار حلی برای مسئله دو جسم را بررسی کردیم تا حدی به نوشتن معادلات و اتفاقی که در مدار می‌افتد شهود پیدا کردیم. البته این تنها راه حل نیست و راه‌های دیگری نیز برای بدست آوردن معادله حرکت دوتایی‌ها وجود دارد. همانطور که قبلا اشاره کردیم می‌خواهیم حالاتی از تغییر جرم را بررسی‌کنیم. این تغییرات را به دو دسته کلی تغییر جرم ناگهانی و تغییر جرم پیوسته تقسیم می‌کنیم.

مسئله دیگری که وجود دارد تحولات اخترفیزیکی هر یک از مولفه‌ها است.

چیزی که قرار است ما در ادامه بررسی‌کنیم تغییرات جرمی مولفه‌ها در اثر تحولات و تاثیر این قضیه بر مدارهای ذرات است. برای مثال انفجارهای ابرنواختری برای ستارگان سنگین باعث می‌شوند جرم، کاهش قابل توجهی داشته باشد، یا سوزاندن جرم و بادهای ستاره‌ای که خروج مجموعه ذرات از ستاره هستند، گرچه بسیار آرام انجام می‌شوند ولی می‌توانند تاثیراتی بر مدار جسمی که تحت گرانش ستاره است داشته باشند.

و در حالاتی ممکن است جرم از یک مولفه به مولفه دیگر انتقال پیدا کند.

ما سعی می‌کنیم چند حالت را با مدل‌سازی های ساده بررسی کنیم و معادلات را برای آن‌ها بنویسیم.

تغییر جرم ناگهانی یا گسسته

این حالت شامل تغییراتی است که به طور آنی اتفاق می‌افتند و زمان انجام رخداد صفر است. به لحاظ یک بررسی واقعی این حالت غالبا انفجار های ستاره ای را در برمی‌گیرد مثلا تشدید واکنش های هسته ای یا تحولات ستاره ای و به طور خاص انفجارهای ابرنواختری. با دیدن فرض ها و معادلات این راه حل ها شهود بسیار بهتری به اتفاقاتی که در این پدیده فیزیکی می‌افتد پیدا می‌کنید. بیش از این وقت را تلف نمی‌کنیم و به سراغ حل مواردی خاص از این مسئله می‌رویم.

تغییر جرم ناگهانی یک مولفه

برای شروع یک حالت معروف را بررسی می‌کنیم که شاید تا به حال حل‌های مختلف و شاید متناقضی (!) برای این حالت دیده باشید. اتفاقی که در این حالت می‌افتد این است که در یک سیستم دوتایی که در مدار های دایروی در حال حرکت هستند، مقداری جرم از یکی از مولفه‌ها به طور ناگهانی ناپدید می‌شود.

برای حل این مساله فرض می‌کنیم که جرم Δm از جرم اول ($m_۱$) به بیرون پرتاب شود. فرض می‌کنیم Δm به صورت همسانگرد (پوسته کروی) از جرم ۱ دور می‌شود و بنابراین در زمانی که شعاع پوسته از شعاع مداری کمتر است نیروی گرانش وارده بر جرم دوم ($m_۲$) تغییری نمی‌کند و هنگامی که شعاع پوسته از شعاع مداری بزرگتر شود، در یک لحظه جرم $m_۱$ به $m_R = m_۱ - \Delta m$ تبدیل می‌شود.

انرژی مدار قبل از انفجار از دید مرکز جرم را، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E_i = \mu\varepsilon = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r}$$

با فرض دایروی بودن مدار اولیه برای سرعت داریم:

$$v^2 = v_c^2 = \frac{k}{\mu r} = \frac{G(m_1 + m_2)}{r}$$

لحظه ای که شعاع پوسته بزرگتر از شعاع مداری می‌شود تقریبا سرعت نسبی ثابت می‌ماند و جرم اول تغییر می‌کند. برای رابطه انرژی در این لحظه داریم: (m_1 به m_R تبدیل می‌شود و سرعت را از رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم.)

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{m_R m_2}{m_R + m_2}\frac{G(m_1 + m_2)}{r} - \frac{Gm_R m_2}{r}$$

سرنوشت مدار جدید را اندازه این انرژی جدید تعیین خواهدکرد. شرط مقید ماندن مدار منفی بودن این انرژی است:

$$E_f < 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_R m_2}{m_R + m_2}\frac{G(m_1 + m_2)}{r} - \frac{Gm_R m_2}{r} < 0$$

دو طرف این عبارت را در $\frac{2r(m_R+m_2)}{Gm_R m_2}$ ضرب می‌کنیم:

$$(m_1 + m_2) - 2(m_R + m_2) < 0$$

$$m_2 + m_1 - 2m_R - 2m_2 < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m_R > \frac{m_1 - m_2}{2}}$$

و یا به عبارتی:

$$\Delta m = m_1 - m_R \Rightarrow \boxed{\Delta m < \frac{m_1 + m_2}{2}}$$

و اما جوابی دیگر برای این مسئله:

در این روش برای بدست آوردن انرژی، انرژی جنبشی هر جرم را به صورت جداگانه می‌نویسیم و انرژی مکانیکی را از رابطه انرژی مدار جایگذاری می‌کنیم:

$$E_i = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} = -\frac{Gm_1 m_2}{2r}$$

با توجه به رابطه مرکز جرم داریم:

$$m_۱ v_۱ = m_۲ v_۲ \Rightarrow v_۲ = \frac{m_۱}{m_۲} v_۱$$

و با توجه به استدلال های قسمت قبلی، در رابطه با سرعت پس از جدا شدن Δm برای انرژی سیستم داریم:

$$E_f = \frac{۱}{۲} m_R v_۱^۲ + \frac{۱}{۲} m_۲ v_۲^۲ - \frac{G m_R m_۲}{r}$$

در روابط ابتدا سرعت $v_۲$ را برحسب جرم ها و $v_۱$ می‌نویسیم:

$$E_i = \frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ + \frac{۱}{۲} m_۲ (\frac{m_۱}{m_۲} v_۱)^۲ - \frac{G m_۱ m_۲}{r} = -\frac{G m_۱ m_۲}{۲r} \qquad (*)$$

$$E_f = \frac{۱}{۲} m_R v_۱^۲ + \frac{۱}{۲} m_۲ (\frac{m_۱}{m_۲} v_۱)^۲ - \frac{G m_R m_۲}{r} \qquad (**)$$

از رابطه(*) ، $v_۱$ را بدست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ + \frac{۱}{۲} m_۲ (\frac{m_۱}{m_۲} v_۱)^۲ = + \frac{G m_۱ m_۲}{۲r}$$

$$\Rightarrow v_۱^۲ \left(m_۱ + \frac{m_۱^۲}{m_۲} \right) = \frac{G m_۱ m_۲}{r}$$

$$v_۱^۲ m_۱ \left(۱ + \frac{m_۱}{m_۲} \right) = \frac{G m_۱ m_۲}{r}$$

$$\Rightarrow v_۱^۲ = \frac{G m_۲}{r \left(۱ + \frac{m_۱}{m_۲} \right)} = \frac{G m_۲^۲}{r(m_۱ + m_۲)}$$

حال $v_۱$ را در رابطه (**) جایگذاری می‌کنیم:

$$E_f = \frac{۱}{۲} m_R \frac{G m_۲^۲}{r(m_۱ + m_۲)} + \frac{۱}{۲} \frac{m_۱^۲}{m_۲} \frac{G m_۲^۲}{r(m_۱ + m_۲)} - \frac{G m_R m_۲}{r}$$

شرط مقید بودن مدار، منفی بودن انرژی کل است:

$$E_f < ۰$$

که با جایگذاری داریم:

$$\frac{۱}{۲} m_R \frac{G m_۲^۲}{r(m_۱ + m_۲)} + \frac{۱}{۲} \frac{m_۱^۲}{m_۲} \frac{G m_۲^۲}{r(m_۱ + m_۲)} - \frac{G m_R m_۲}{r} < ۰$$

حال این عبارت را ساده سازی می‌کنیم و آن را در $\frac{2r(m_1+m_2)}{G}$ ضرب می‌کنیم:

$$m_R m_2^2 + m_1^2 m_2 - 2m_R m_2(m_1 + m_2) < 0$$

$$m_R m_2^2 + m_1^2 m_2 - 2m_R m_2 m_1 - 2m_R m_2^2 < 0$$

$$m_1^2 m_2 - 2m_R m_2 m_1 - m_R m_2^2 < 0$$

معادله را بر m_2 تقسیم می‌کنیم:

$$m_1^2 - m_R(2m_1 + m_2) < 0$$

$$m_R > \frac{m_1^2}{(2m_1 + m_2)}$$

که این رابطه با رابطه بدست آمده در قسمت قبل در تناقض است! همچنین می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{m_R}{m_1 + m_2} > \frac{m_1^2}{(2m_1 + m_2)(m_1 + m_2)}$$

صورت و مخرج را بر m_1^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{m_R}{m_1 + m_2} > \frac{1}{\left(2 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}$$

که در حد $\frac{m_2}{m_1} \to 0$ (جرم دوم بسیار ناچیز باشد) حد پایین m_R بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m_R}{m_1 + m_2} > \frac{1}{\left(2 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} \geq \frac{1}{2}}$$

و اما مشکل اصلی که در راه‌حل قبلی به آن توجه نشده بود، سرعت مرکزجرم بعد از کاهش جرم یک مولفه است. قبل از کاهش جرم در حالت اولیه، همه معادلات و سرعت هارا در دستگاه مرکزجرم می‌نویسیم لذا تمام معادلات مرکزجرم برقرار هستند و سرعت مرکزجرم صفر است. اما بعد از ایجاد تحول و تغییر جرم یک مولفه با توجه به رابطه سرعت مرکزجرم و اینکه سرعت دو مولفه و جرم مولفه دیگر ثابت می‌مانند، سرعت مرکزجرم الزاما تغییر می‌کند و دیگر صفر نخواهد بود. حال موضوع این است که وجود سرعت مرکزجرم چه تاثیری بر روی مسئله ما می گذارد؟

در این مسئله ما می خواهیم وضعیت مقید بودن سیستم را بعد از تغییر ایجاد شده بررسی‌کنیم. نکته اصلی و مهم اینجا است که در یک سیستم دوتایی سرعتی که باعث نامقید شدن یا فرار یک مولفه می‌شود سرعت نسبی دو مولفه نسبت به یکدیگر است و سرعت مرکزجرم یا در واقع سرعت کل مجموعه، تاثیری در این قضیه ندارد.

شهود بهتر برای این قضیه توجه به انرژی است. در یک سیستم دوتایی گرانشی، یک انرژی پتانسیل گرانشی وجود دارد که عامل مقید بودن و جذب مولفه ها است و یک انرژی جنبشی که می خواهد انرژی کل سیستم را زیاد کند و آن‌را نامقید کند؛ اما نکته اصلی این‌جا است که این انرژی جنبشی که می خواهد سیستم را نامقید کند با جمع انرژی جنبشی دو مولفه در هر دستگاه دلخواه

برابر نیست. برای این برابری باید انرژی‌های جنبشی را حتما در دستگاه مرکزجرم بنویسیم. احتمالا دیده‌اید که انرژی جنبشی یک سیستم دوتایی را به فرم زیر می‌نویسند:

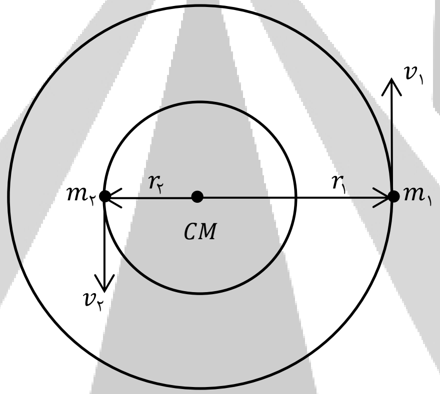
$$K = K_{rel} + K_{CM}$$

K_{rel} دقیقا همان بخش از انرژی جنبشی است که در مقید بودن یا نبودن نقش دارد و می بینیم که فقط در دستگاه مرکز جرم $K = K_{rel}$ می شود.

پس ما برای اصلاح پاسخ، باید معادلات و سرعت های بعد از کاهش جرم را در دستگاه مرکز جرم ثانویه بنویسیم و این عملا به این معنی است که سرعت مرکز جرم بعد از کاهش جرم را بدست آوریم و از سرعت مولفه‌ها کم کنیم.

باتوجه به این‌که همه بردارها در دو راستا ارجح، خط واصل دوجسم و راستای عمود برآن هستند، معادلات را از حالت برداری خارج کرده و به‌صورت اسکالر می‌نویسیم. اثر جهت بردار را در علامت اسکالر آن لحاظ می‌کنیم.

مسئله را اینطور در نظر بگیرید که یک سیستم دوتایی با جرم های $m_۱$ و $m_۲$ داریم که طی یک اتفاق جرم ۱ به m_R تغییر پیدا می‌کند. فاصله اولیه دو جسم را با D نشان می‌دهیم. سرعت‌های دو مولفه در دستگاه مرکز جرم اولیه، که بعد تغییر جرم هم ثابت باقی می ماند را با $v_۲$ و $v_۱$ و سرعت‌های دو مولفه در دستگاه مرکز جرم ثانویه را با $v'_۱$ و $v'_۲$ نشان می‌دهیم. به شکل و معادلات زیر توجه کنید:



$$v_{CM} = \frac{m'_۲ v_۲ - m'_۱ v_۱}{m'_۱ + m'_۲}$$

$$m'_۲ = m_۲ \ , \ \ m'_۱ = m_R$$

$$M = m_۱ + m_۲$$

با وجود اینکه فاصله بین دو جسم ثابت می‌ماند ولی فاصله از مرکز جرم هر مولفه عوض می‌شود چون مکان مرکز جرم جابجا شده است.

$$D = r_۱ + r_۲ = r'_۱ + r'_۲ = cte$$

$$m_۱ r_۱ = m_۲ r_۲ \Rightarrow \ \ r_۱ = \frac{m_۲}{m_۱} r_۲$$

$$D = r_۱ + r_۲ = \frac{m_۲}{m_۱} r_۲ + r_۲ = r_۲\left(۱ + \frac{m_۲}{m_۱}\right) = \frac{r_۲}{m_۱} M$$

$$r_۱ = \frac{D}{M} m_۲ \quad , \quad r_۲ = \frac{D}{M} m_۱$$

و برای سرعت دو ذره، معادله نیرو اولیه را می‌نویسیم و باز هم از معادلات مرکز جرم استفاده می‌کنیم.

$$F = -\frac{G m_۱ m_۲}{D^۲} = -\frac{m_۱ v_۱^۲}{r_۱} = -\frac{m_۲ v_۲^۲}{r_۲}$$

$$v_۱^۲ = \frac{G}{D^۲} m_۲ r_۱ \quad , \quad v_۲^۲ = \frac{G}{D^۲} m_۱ r_۲$$

با جایگذاری $r_۱$ و $r_۲$ از روابط قبل:

$$v_۱ = \sqrt{\frac{G}{MD}} m_۲ \; , \; v_۲ = \sqrt{\frac{G}{MD}} m_۱$$

پس برای سرعت مرکز جرم خواهیم داشت:

$$v_{CM} = \frac{m_۲ v_۲ - m_R v_۱}{m_۲ + m_R} = \frac{m_۱ m_۲ - m_۲ m_R}{m_۲ + m_R} \sqrt{\frac{G}{MD}}$$

$$v_{CM} = \frac{m_۲ (m_۱ - m_R)}{m_۲ + m_R} \sqrt{\frac{G}{MD}}$$

$$v'_۱ = v_۱ + v_{CM} \; , \; v'_۲ = v_۲ - v_{CM}$$

$$v'_۱ = m_۲ \sqrt{\frac{G}{MD}} \left(۱ + \frac{m_۱ - m_R}{m_۲ + m_R}\right) = m_۲ \sqrt{\frac{G}{MD}} \left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۲ + m_R}\right)$$

$$v'_۲ = \sqrt{\frac{G}{MD}} \left(m_۱ - \frac{m_۲ (m_۱ - m_R)}{m_۲ + m_R}\right) = m_R \sqrt{\frac{G}{MD}} \left(\frac{m_۱ + m_۲}{m_۲ + m_R}\right)$$

$$v'_۱ = \frac{m_۲}{m_۲ + m_R} \sqrt{\frac{GM}{D}}$$

$$v'_۲ = \frac{m_R}{m_۲ + m_R} \sqrt{\frac{GM}{D}}$$

حال انرژی جنبشی سیستم در مرکز جرم را می‌نویسیم:

$$K_{rel} = \frac{۱}{۲}(m_R v_۱'^۲ + m_۲ v_۲'^۲)$$

$$K_{rel} = \frac{GM}{۲D}\left(m_R\left(\frac{m_۲}{m_۲+m_R}\right)^۲ + m_۲\left(\frac{m_R}{m_۲+m_R}\right)^۲\right)$$

$$K_{rel} = \frac{GMm_۲m_R}{۲D(m_۲+m_R)^۲}(m_۲+m_R)$$

$$\boxed{K_{rel} = \frac{GMm_۲m_R}{۲D(m_۲+m_R)}}$$

برای بررسی انرژی سیستم باید انرژی پتانسیل گرانشی را هم بنویسیم:

$$U = -\frac{Gm_۲m_R}{D}$$

پس معادله انرژی سیستم بدین شکل می‌شود:

$$E = K_{rel} + U = \frac{GMm_۲m_R}{۲D(m_۲+m_R)} - \frac{Gm_۲m_R}{D}$$

$$E = \frac{Gm_۲m_R}{۲D(m_۲+m_R)}(m_۱ - m_۲ - ۲m_R)$$

در یک سیستم گرانشی شرط پایداری این است که انرژی آن منفی باشد. پس اگر بخواهیم بعد از تغییر سیستم پایدار بماند:

$$E < ۰$$

$$\frac{Gm_۲m_R}{۲D(m_۲+m_R)}(m_۱ - m_۲ - ۲m_R) < ۰$$

$$m_۱ - m_۲ - ۲m_R < ۰$$

$$\boxed{m_R > \frac{m_۱ - m_۲}{۲}}$$

که این همان نتیجه گیری قسمت اول است.

پارامترهای مدار ثانویه در این حالت

فرض می‌کنیم این شرط برقرار است و مدار ثانویه همچنان مقید است. می‌خواهیم پارامتر های مدار ثانویه را پیدا کنیم. انرژی مدار نسبی به طریق زیر به پارامتر های مدار معادل ربط دارد:

$$E = -\frac{GM\mu}{2a} = -\frac{Gm_1'm_2'}{2a}$$

$$a = a_1 + a_2$$

دو معادله را برابر می‌گذاریم:

$$\frac{Gm_2m_R}{2D(m_2+m_R)}(m_1 - m_2 - 2m_R) = -\frac{Gm_1'm_2'}{2a}$$

با ساده سازی معادله بدست می‌آید که:

$$\boxed{a = \left(\frac{m_2+m_R}{2m_R+m_2-m_1}\right)D}$$

پارامتر دیگری که باید بررسی‌کنیم تکانه زاویه‌ای است که خروج از مرکز را به ما می‌دهد. مدارهای اولیه دایره هستند پس سرعت ها بر شعاع ها عمود هستند. تکانه زاویه‌ای را در دستگاه مرکز جرم می‌نویسیم:

$$L = m_1'r_1'v_1' + m_2'r_2'v_2' = m_Rr_1'v_1' + m_2r_2'v_2'$$

دستگاه مرکزجرم ایجاب می‌کند:

$$D = a_1'(m_R + m_2)$$

$$m_Rr_1' = m_2r_2'$$

به سادگی اثبات می‌شود که:

$$m_Rr_1' = m_2r_2' = \frac{Dm_2m_R}{m_2+m_R}$$

پس:

$$L = \frac{Dm_2m_R}{m_2+m_R}(v_1'+v_2') = \frac{Dm_2m_R}{m_2+m_R}(v_1+v_2)$$

$$L = \frac{Dm_2m_R}{m_2+m_R}\sqrt{\frac{G}{MD}}(m_1+m_2)$$

$$L = \frac{m_2m_R}{m_2+m_R}\sqrt{G(m_1+m_2)D}$$

و معادله مدار معادل برای جرم‌کاهیده:

$$L = \mu\sqrt{G(m_۲ + m_R)a(۱ - e^۲)}$$

$$\mu = \frac{m'_۱ m'_۲}{m'_۱ + m'_۲} = \frac{m_۲ m_R}{m_۲ + m_R}$$

برابر گذاشتن دو معادله این نتیجه را می‌دهد که:

$$(m_۱ + m_۲)D = (m_۲ + m_R)a(۱ - e^۲)$$

a را هم از معادله که از انرژی بدست آوردیم جایگذاری می‌کنیم:

$$(m_۱ + m_۲)D = \frac{(m_۲ + m_R)^۲ D}{m_۲ - m_۱ + ۲m_R}(۱ - e^۲)$$

$$۱ - e^۲ = \frac{(m_۱ + m_۲)(m_۲ - m_۱ + ۲m_R)}{(m_۲ + m_R)^۲}$$

$$e^۲ = \frac{(m_۲ + m_R)^۲ - (m_۱ + m_۲)(m_۲ - m_۱ + ۲m_R)}{(m_۲ + m_R)^۲}$$

$$e^۲ = \frac{{m_۲}^۲ + {m_R}^۲ + ۲m_۲ m_R - {m_۲}^۲ + m_۱ m_۲ - m_۱ m_۲ + {m_۱}^۲ - ۲m_۱ m_R - ۲m_۲ m_R}{(m_۲ + m_R)^۲}$$

$$e^۲ = \frac{{m_R}^۲ + {m_۱}^۲ - ۲m_۱ m_R}{(m_۲ + m_R)^۲}$$

$$e^۲ = \frac{(m_۱ - m_R)^۲}{(m_۲ + m_R)^۲}$$

$$\boxed{e = \frac{m_۱ - m_R}{m_۲ + m_R}}$$

به این ترتیب خروج از مرکز نیز بدست آمد. می‌توان خروج از مرکز را برحسب دو پارامتر دیگر هم نوشت که شاید جالب باشد. در نظر می‌گیریم که مقدار جرم ناپدید شده از جرم یک برابر Δm باشد، یعنی:

$$m_۱ = m_R + \Delta m$$

و $M = m_۱ + m_۲$ باشد می‌توانیم خروج از مرکز را اینگونه بنویسیم:

$$\boxed{e = \frac{\Delta m}{M - \Delta m} = \frac{{\Delta m}/{M}}{۱ - {\Delta m}/{M}}}$$

با بررسی این روش‌ها، اکنون دید بهتری نسبت به مسئله دارید. حالت بعدی که می‌خواهیم بررسی‌کنیم حالت انتقال‌جرم بدون اتلاف است، یعنی می‌خواهیم اصل پایستگی جرم را لحاظ کنیم. توضیحات بیشتر این حالت در ادامه آمده است.

تغییر جرم ناگهانی بدون اتلاف (پایستگی جرم)

در این بخش می‌خواهیم حالتی از انتقال جرم آنی را بررسی‌کنیم که در آن جرم پایسته می‌ماند. بیان جامع تر مسئله از این قرار است که دو جسم تحت گرانش یکدیگر، در مدار های اولیه دایروی به دور مرکز جرم گردش می‌کنند که ناگهان مقداری جرم از یکی از مولفه‌ها به دیگری منتقل می‌شود به طوری که مجموع جرم همچنان ثابت بماند. همچنین بعد از انتقال جرم، سرعت دو مولفه و فاصله بین آنها ثابت می‌ماند.

$$m_۱' = m_۱ - \Delta m \ \ , m_۲' = m_۲ + \Delta m$$

$$m_۱' + m_۲' = m_۱ + m_۲ = M = cte$$

با وجود اینکه فاصله بین دو جسم ثابت می‌ماند ولی فاصله از مرکزجرم هر مولفه عوض می‌شود چون مکان مرکزجرم جابجا شده است.

$$D = r_۱ + r_۲ = r_۱' + r_۲' = cte$$

$$m_۱ r_۱ = m_۲ r_۲ \Rightarrow \ \ r_۱ = \frac{m_۲}{m_۱} r_۲$$

$$D = r_۱ + r_۲ = \frac{m_۲}{m_۱} r_۲ + r_۲ = r_۲\left(۱ + \frac{m_۲}{m_۱}\right) = \frac{r_۲}{m_۱} M$$

$$r_۱ = \frac{D}{M} m_۲ \quad , \ \ r_۲ = \frac{D}{M} m_۱$$

و برای سرعت دو ذره، معادله نیرو اولیه را می‌نویسیم و باز هم از معادلات مرکزجرم استفاده می‌کنیم:

$$F = -\frac{G m_۱ m_۲}{D^۲} = -\frac{m_۱ v_۱^۲}{r_۱} = -\frac{m_۲ v_۲^۲}{r_۲}$$

$$v_۱^۲ = \frac{G}{D^۲} m_۲ r_۱ \quad , \ \ v_۲^۲ = \frac{G}{D^۲} m_۱ r_۲$$

با جایگذاری $r_۱$ و $r_۲$ از روابط قبل:

$$v_۱ = \sqrt{\frac{G}{MD}} m_۲ \ , \ v_۲ = \sqrt{\frac{G}{MD}} m_۱$$

سرعت مرکزجرم، قبل از انتقال صفر است و ما باید سرعت مرکزجرم را بعد از انتقال بیابیم:

$$v_{CM} = m_۲ v_۲ - m_۱ v_۱ = ۰$$

$$v_{CM}' = \frac{m_۲' v_۲ - m_۱' v_۱}{m_۱' + m_۲'} = \frac{(m_۲ + \Delta m\ ) v_۲ - (m_۱ - \Delta m) v_۱}{M}$$

$$m_۱ v_۱ = m_۲ v_۲$$

$$v'_{CM} = \Delta m \frac{(v_۱ + v_۲)}{M} = \frac{\Delta m}{M}\sqrt{\frac{G}{MD}}(m_۱ + m_۲)$$

$$v'_{CM} = \Delta m \sqrt{\frac{G}{MD}}$$

حالا به سراغ بررسی انرژی ثانویه مدار می‌رویم تا پایداری آن‌را بررسی‌کنیم. همان طور که قبلا بیان‌کردیم انرژی جنبشی‌ای که برای بررسی پایداری موثر است انرژی جنبشی نسبی (K_{rel}) یا همان انرژی جنبشی در دستگاه مرکز جرم است که یعنی باید سرعت هارا تصحیح کنیم:

$$K_{rel} = \frac{۱}{۲}m'_۱(v_۱ + v'_{CM})^۲ + \frac{۱}{۲}m'_۲(v_۲ - v'_{CM})^۲$$

$$K_{rel} = \frac{۱}{۲}\left((m_۱ - \Delta m)\left(\sqrt{\frac{G}{MD}}(m_۲ + \Delta m)\right)^۲ + (m_۲ + \Delta m)\left(\sqrt{\frac{G}{MD}}(m_۱ - \Delta m)\right)^۲\right)$$

$$K_{rel} = \frac{G}{۲MD}\left((m_۱ - \Delta m)(m_۲ + \Delta m)^۲ + (m_۲ + \Delta m)(m_۱ - \Delta m)^۲\right)$$

$$K_{rel} = \frac{G(m_۱ - \Delta m)(m_۲ + \Delta m)}{۲MD}(m_۱ - \Delta m + m_۲ + \Delta m)$$

$$K_{rel} = \frac{G(m_۱ - \Delta m)(m_۲ + \Delta m)}{۲MD}M$$

$$\boxed{K_{rel} = \frac{G(m_۱ - \Delta m)(m_۲ + \Delta m)}{۲D} = \frac{Gm'_۱m'_۲}{۲D}}$$

و بخش دیگر انرژی که انرژی پتانسیل گرانشی است، را هم به سادگی بین این دو جسم داریم:

$$U = -\frac{Gm'_۱m'_۲}{D}$$

معادله انرژی را می‌نویسیم:

$$E = K_{rel} + U = \frac{Gm'_۱m'_۲}{۲D} - \frac{Gm'_۱m'_۲}{D}$$

$$E = -\frac{Gm'_۱m'_۲}{۲D}$$

پس انرژی ثانویه همیشه منفی خواهد بود، یعنی مدار بسته باقی می‌ماند و مدار ثانویه در حالت کلی بیضی است و هر یک از مولفه ها در مداری بیضی حول مرکز جرم دوران می‌کنند. نیم قطر اطول این دو مدار را a_1 و a_2 می‌نامیم. از مسئله جرم‌کاهیده و مدار نسبی به یاد داریم که انرژی مدار نسبی به طریق زیر به پارامترهای مدار معادل مربوط است:

$$E = -\frac{GM\mu'}{2a} = -\frac{Gm'_1m'_2}{2a}$$

$$a = a_1 + a_2$$

نتیجه می‌گیریم که نیم قطر اطول مدار نسبی با فاصله اولیه دو جسم برابر است:

$$a = D$$

برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر از مدار، باید تکانه زاویه‌ای آن‌را هم در دستگاه مرکز جرم بنویسیم. چون مدار های اولیه دایروی بوده‌اند، پس سرعت ها بر فاصله های از مرکز عمود هستند:

$$L = m'_1r'_1(v_1 + v'_{CM}) + m'_2r'_2(v_2 - v'_{CM})$$

برای ساده‌سازی دو راه داریم:

راه اول) معادله مکان مرکز جرم ثانویه را می‌نویسیم تا مقدار جابجایی مرکز جرم را بدست آوریم:

$$m'_1r'_1 = m'_2r'_2$$

$$r'_1 = r_1 + \Delta r \ , \ r'_2 = r_2 - \Delta r$$

$$(m_1 - \Delta m)(r_1 + \Delta r) = (m_2 + \Delta m)(r_2 - \Delta r)$$

$$m_1r_1 + m_1\Delta r - r_1\Delta m - \Delta m\Delta r = m_2r_2 + r_2\Delta m - m_2\Delta r - \Delta m\Delta r$$

$$m_1\Delta r - r_1\Delta m = r_2\Delta m - m_2\Delta r$$

$$\Delta r(m_1 + m_2) = \Delta m(r_1 + r_2)$$

$$\Delta r = \frac{D}{M}\Delta m$$

$$r'_1 = \frac{D}{M}(m_2 + \Delta m) \ , \ r'_2 = \frac{D}{M}(m_1 - \Delta m)$$

حال جایگذاری می‌کنیم:

$$L = \frac{D}{M}\sqrt{\frac{G}{MD}}\left((m_1 - \Delta m)(m_2 + \Delta m)^2 + (m_2 + \Delta m)(m_1 - \Delta m)^2\right)$$

$$L = \sqrt{\frac{GD}{M}}(m_1 - \Delta m)(m_2 + \Delta m) = m'_1 m'_2 \sqrt{\frac{GD}{M}}$$

راه دوم)

$$L = m'_1 r'_1 (v_1 + v'_{CM}) + m'_2 r'_2 (v_2 - v'_{CM})$$

$$L = m'_1 r'_1 (v_1 + v'_{CM} + v_2 - v'_{CM}) = m'_1 r'_1 (v_1 + v_2)$$

$$r'_1 = \frac{D}{M} m'_2 \quad , \quad r'_2 = \frac{D}{M} m'_1$$

$$m'_1 r'_1 = m'_2 r'_2 = \frac{D}{M} m'_1 m'_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G}{MD}} m_2 \ , \qquad v_2 = \sqrt{\frac{G}{MD}} m_1$$

$$L = \frac{D}{M} m'_1 m'_2 \sqrt{\frac{G}{MD}} (m_1 + m_2) = m'_1 m'_2 \sqrt{\frac{GD}{M}}$$

حالا یک M ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$L = \frac{m'_1 m'_2}{M} \sqrt{GMD}$$

رابطه تکانه زاویه‌ای مدار نسبی را یادآوری می‌کنیم:

$$L = \mu \sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

$$\mu = \frac{m'_1 m'_2}{m'_1 + m'_2} = \frac{m'_1 m'_2}{M}$$

$$L = \frac{m'_1 m'_2}{M} \sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

حال از برابر گذاشتن دو رابطه بدست می‌آید:

$$a(1 - e^2) = D$$

و از معادله انرژی بدست آورده بودیم:

$$a = D$$

پس نتیجه می‌شود:

$$e = 0$$

در کمال تعجب می‌بینیم که مدار همچنان دایروی باقی می‌ماند و فقط مکان مرکز جرم عوض می‌شود!

نتیجه جالب و کلی این بحث این است که در یک انتقال جرم آنی یا لحظه‌ای در مدار دایروی اگر اتلاف جرم نداشته باشیم و جرم پایسته بماند، مدار همچنان مقید و دایروی باقی می‌ماند.

توجه داشته باشید مدار اجسام از دید دستگاه مرکز جرم دایره هستند و از دید ناظر بیرونی دایره‌هایی می باشند که در حال حرکت هستند که در حالاتی مسیر حرکت ظاهری می تواند خم چرخزاد باشد.

تا به اینجا دو حالت انتقال جرم ناگهانی را بررسی کردیم که نتایج بسیار جالبی را در پی‌داشتند. در ادامه می‌خواهیم انتقال جرم پیوسته را بررسی کنیم.

تغییر پیوسته جرم

در این بخش می خواهیم حالت‌هایی را بررسی‌کنیم که در آنها جرم با آهنگی خاص از دست می‌رود یا منتقل می‌شود و ناگهانی حذف و منتقل نمی‌شود. فرض کنید آهنگ‌های تغییر جرم را داریم و آنها را با $\dot{m}_۱$ و $\dot{m}_۲$ نشان می‌دهیم:

$$m_{۱(t)} = m_{۱(t.)} + \int_{t.}^{t} \dot{m}_۱ \, dt$$

$$m_{۲(t)} = m_{۲(t.)} + \int_{t.}^{t} \dot{m}_۲ \, dt$$

همچنین ازبین‌رفتن یا انتقال جرم فقط در اندازه گرانش تاثیر دارد و فرض می کنیم جرم‌های ازدست‌رفته دیگر اثر گرانشی ندارند یا با تقارن کروی دور می‌شوند، یعنی نیروی ما همچنان شعاعی و مرکزی باقی می‌ماند و شتاب در راستای مماسی صفر است پس معادلات نیرو را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$F_۱ = -\frac{Gm_۱m_۲}{r^۲} = m_۱(\ddot{r}_۱ - r_۱\dot{\theta}_۱^۲)$$

$$F_۲ = -\frac{Gm_۱m_۲}{r^۲} = m_۲(\ddot{r}_۲ - r_۲\dot{\theta}_۲^۲)$$

$$r = r_۱ + r_۲$$

که این معادلات الزاما حل تحلیلی ندارند و اغلب حالت ها بسیار طولانی و سخت می‌شوند. می‌خواهیم با ایجاد چند فرض و تقریب، مسئله را کمی ساده کنیم.

انتقال جرم پیوسته بدون اتلاف

می خواهیم حالتی از انتقال جرم پیوسته را بررسی کنیم که از پایستگی جرم هم تبعیت می‌کند یعنی هیچ اتلاف جرمی نداریم. فرض می‌کنیم که جرم مجموع سیستم برابر M است و ثابت می‌ماند و تابع انتقال جرم $\dot{m}(t)$ است. همچنین مدار اولیه دایروی است و فاصله دو جرم برابر D است.

همان‌طور که در بخش‌های قبل دیدیم مدار این سیستم از دید مرکز جرم همیشه به‌صورت دایروی خواهد ماند ولی خود مرکز جرم دارای دو حرکت خواهد بود:

- ✓ حرکت ناشی از تغییر مکان خود مرکز جرم بخاطر انتقال جرم که آن را $\dot{r}$ می‌نامیم.
- ✓ حرکت ناشی از سرعت اجرام که عمود بر خط واصل دو جسم است و در هر مرحله آن را dV_{CM} می‌نامیم.

حرکت اول از $m_{۱}$ به سمت $m_{۲}$ است (جرم $m_{۱}$ بیشتر است) و حرکت دوم عمود بر این است پس در هر لحظه می‌توانیم بنویسیم:

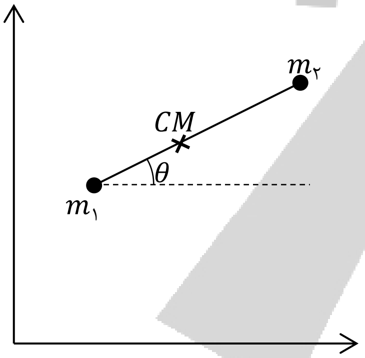
$$\vec{R}(t+dt) = \vec{R}(t) + \vec{\dot{r}}(t)dt + \vec{V}_{CM}(t)dt$$

که $\vec{R}$ بردار مکان مرکز جرم است. از بخش قبل می‌دانیم:

$$\Delta r = \frac{D}{M}\Delta m \Rightarrow |\dot{r}(t)| = \frac{D}{M}\ \dot{m}(t)$$

$$\Delta V_{CM} = \Delta m\sqrt{\frac{G}{MD}} \Rightarrow |dV_{CM}| = \sqrt{\frac{G}{MD}}\,dm = \sqrt{\frac{G}{MD}}\ \dot{m}(t)\ dt$$

اما اگر بخواهیم بردارهای آن‌ها را با کمک شکل روبرو بنویسیم:



$$\vec{\dot{r}}(t) = \frac{D}{M}\ \dot{m}(t)[\cos\theta\ \hat{\imath} + \sin\theta\ \hat{\jmath}]$$

$$\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \sqrt{\frac{G}{MD}}\ \dot{m}(t)\ [-\sin\theta\ \hat{\imath} + \cos\theta\ \hat{\jmath}]$$

اما نکته بعدی در به‌دست آوردن θ است. همان‌طور که می‌دانید در هر لحظه سرعت زاویه‌ای سیستم حول مرکز جرم برابر $\omega = \sqrt{\frac{GM}{D^۳}}$ است و این مقدار ثابت است و ثابت خواهد ماند پس می‌توان گفت $\theta = \omega(t - t_۰)$ است. حال ما همه مراحل مساله را می‌دانیم و خوب است که مساله را واقعا حل کنیم. برای این کار ما باید تابعیت انتقال جرم را داشته باشیم. ابتدا از $\dot{m}(t) = \dot{m} = const.$ شروع می‌کنیم.

$$\vec{V}_{CM} = \int_{t_۰}^{t}\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt}dt = \sqrt{\frac{G}{MD}}\ \dot{m}\ \int_{t_۰}^{t}[-\sin[\omega(t-t_۰)]\ \hat{\imath} + \cos[\omega(t-t_۰)]\ \hat{\jmath}]\ dt$$

$$\vec{V}_{CM} = \sqrt{\frac{G}{MD}}\ \dot{m}\frac{۱}{\omega}\ [(\cos[\omega(t-t_.)] - ۱)\ \hat{\imath} + \sin[\omega(t-t_.)]\ \hat{\jmath}]$$

با جایگذاری ω:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{D}{M}\ \dot{m}\ [(\cos[\omega(t-t_.)] - ۱)\ \hat{\imath} + \sin[\omega(t-t_.)]\ \hat{\jmath}]$$

سپس:

$$d\vec{R} = \left[\vec{\dot{r}}(t) + \vec{V}_{CM}(t)\right]dt = \frac{D}{M}\ \dot{m}\ [(۲\cos[\omega(t-t_.)] - ۱)\ \hat{\imath} + ۲\sin[\omega(t-t_.)]\ \hat{\jmath}]\ dt$$

سپس با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_. + \frac{D}{M}\dot{m}\left[\left(\frac{۲}{\omega}\sin[\omega(t-t_.)] - (t-t_.)\right)\hat{\imath} + \frac{۲}{\omega}(۱ - \cos[\omega(t-t_.)])\hat{\jmath}\right]$$

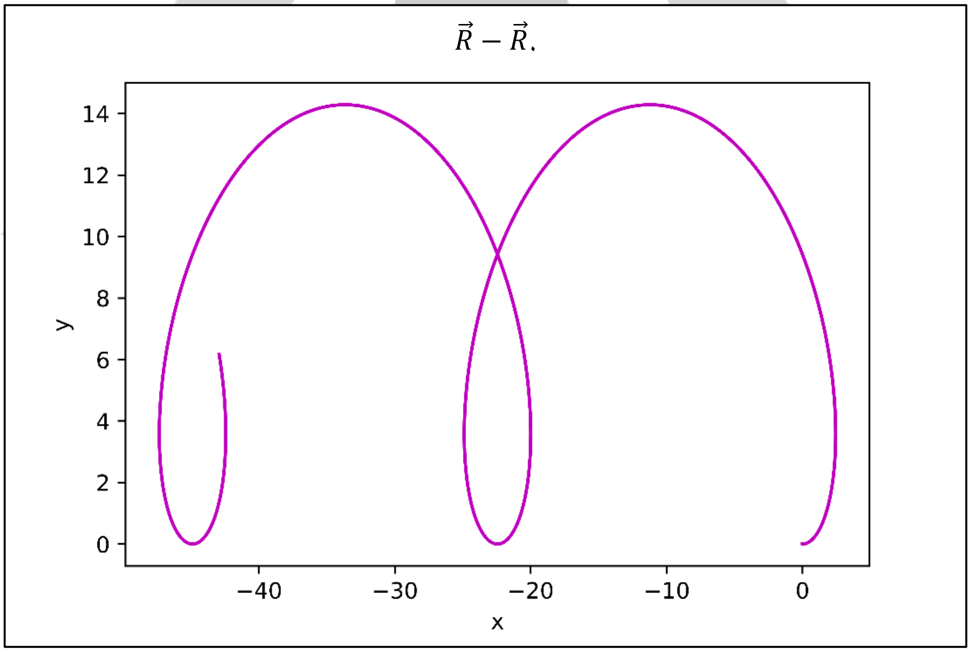
برای فهم بهتر رابطه‌ی بالا را به این صورت می‌نویسیم:

$$\vec{R}(t) - \vec{R}_. = \left[\frac{۲D}{M\omega}\dot{m}(\sin[\omega(t-t_.)]\,\hat{\imath} - \cos[\omega(t-t_.)]\,\hat{\jmath})\right] + \left\{\frac{D}{M}\dot{m}\left(-(t-t_.)\ \hat{\imath} + \frac{۲}{\omega}\ \hat{\jmath}\right)\right\}$$

جمله‌ی اول که در [ ] قرار دارد حرکت بر روی یک دایره را نشان می‌دهد و جمله‌ی دوم که در { } قرار دارد حرکت بر روی خط!

این نوع حرکت را حرکت بر روی سیکلوئید یا چرخزاد می‌نامند و حرکتی بسیار مشهور است که می‌توانید در شکل زیر آن را ببینید:

(به ازای $\frac{D\dot{m}}{M} = ۱$, $\omega = ۰.۲۸$)



حال برای این سیستم می‌خواهیم بردار هر مولفه از دوتایی را نیز بیابیم. بردار هر مولفه برابر است است با بردار مرکز جرم (که در قسمت قبل بدست آوردیم) به اضافه بردار مولفه از مرکز جرم:

$$\vec{R}_1(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_1(t) \quad , \quad \vec{R}_2(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_2(t)$$

برای بدست آوردن بردار از دید مرکزجرم می‌دانیم که مرکزجرم به اندازه $\int dr$ در راستا شعاعی به سمت m_2 حرکت کرده است. پس:

$$\vec{r}_{1/CM}(t) = \vec{r}_{1/CM,0} - \vec{r}_{CM/CM,0}(t)$$

$$\vec{r}_{CM/CM,0}(t) = \hat{r}\int_{t_0}^{t}\frac{dr}{dt}dt = \frac{D}{M}(\cos\theta\ \hat{\imath} + \sin\theta\ \hat{\jmath})\int_{t_0}^{t}\dot{m}(t)dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1(t) = r_{1,0}(-\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath}) - \vec{r}_{CM/CM,0}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1(t) = (-\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath}) - \frac{D}{M}(\cos\theta\ \hat{\imath} + \sin\theta\ \hat{\jmath})\int_{t_0}^{t}\dot{m}(t)dt$$

که در رابطه‌ی بالا $r_{1,0}$ برابر $\frac{D}{M}m_{2,0}$ است و همینطور θ و $\dot{m}(t)$ مانند بخش قبل هستند. پس:

$$\overrightarrow{r_1}(t) = \frac{D}{M}(\cos\omega(t-t_0)\,\hat{\imath} + \sin\omega(t-t_0)\,\hat{\jmath})\left[-m_{2,0} - \dot{m}\int_{t_0}^{t}dt\right]$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1(t) = -\frac{D}{M}(\cos\omega(t-t_0)\,\hat{\imath} + \sin\omega(t-t_0)\,\hat{\jmath})\left[m_{2,0} + \dot{m}(t-t_0)\right]$$

پس برای $\vec{R}_1(t)$ داریم:

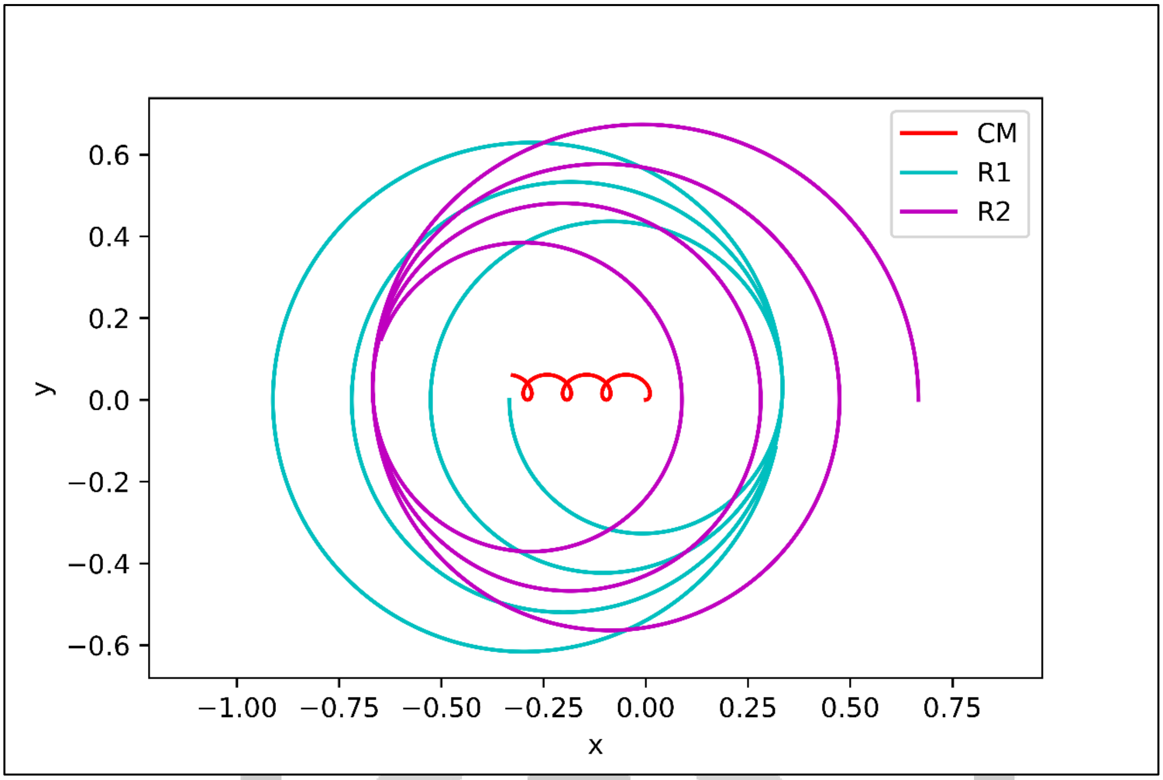
$$\Rightarrow \vec{R}_1(t) = \vec{R}_0 + \frac{D}{M}\dot{m}\left[\left(\frac{2}{\omega}\sin[\omega(t-t_0)] - (t-t_0)\right)\hat{\imath} + \frac{2}{\omega}(1-\cos[\omega(t-t_0)])\hat{\jmath}\right] - \frac{D}{M}(\cos\omega(t-t_0)\,\hat{\imath} + \sin\omega(t-t_0)\,\hat{\jmath})\left[m_{2,0} + \dot{m}(t-t_0)\right]$$

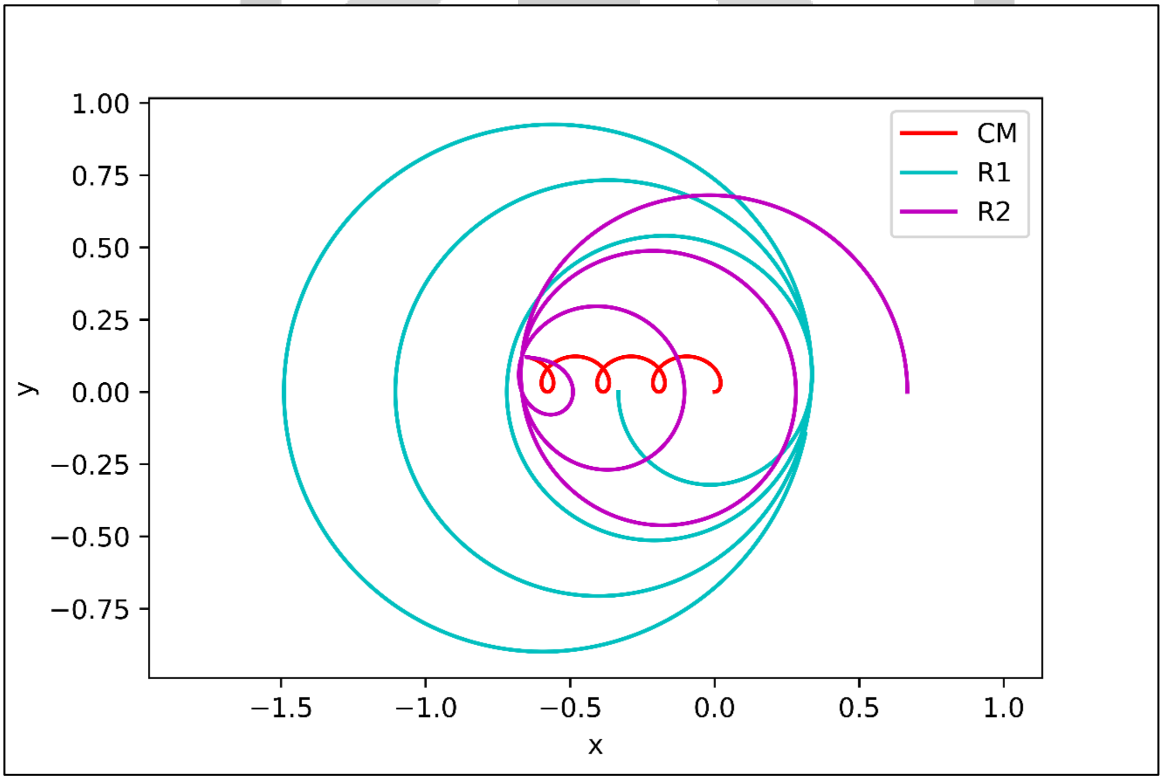
$$\Rightarrow \vec{R}_1(t) = \vec{R}_0 + \frac{D}{M}\dot{m}\left[\left(\frac{2}{\omega}\sin[\omega(t-t_0)] - (t-t_0) - \left(\frac{m_{2,0}}{\dot{m}} + (t-t_0)\right)\cos\omega(t-t_0)\right)\hat{\imath} + \left(\frac{2}{\omega}[1-\cos\omega(t-t_0)] - \left(\frac{m_{2,0}}{\dot{m}} + (t-t_0)\right)\sin\omega(t-t_0)\right)\hat{\jmath}\right]$$

با روند مشابه برای مولفه دوم:

$$\vec{R}_2(t) = \vec{R}_0 + \frac{D}{M}\dot{m}\left[\left(\frac{2}{\omega}\sin[\omega(t-t_0)] - (t-t_0) + \left(\frac{m_{1,0}}{\dot{m}} - (t-t_0)\right)\cos\omega(t-t_0)\right)\hat{\imath} + \left(\frac{2}{\omega}[1-\cos\omega(t-t_0)] + \left(\frac{m_{1,0}}{\dot{m}} - (t-t_0)\right)\sin\omega(t-t_0)\right)\hat{\jmath}\right]$$

با رسم مسیرهای این دو و مرکز جرم به شکل زیر می‌رسیم. $\frac{m_۱}{m_۲} = ۲$ و $\dot{m}$ طوری تنظیم شده که در شکل اول نصف جرم یک و در شکل دوم کل جرم یک به دو منتقل شود. جهت چرخش پادساعتگرد و در $t.$ اجرام روی خط $y = ۰$ قرار دارند:





اما شاید نرخ ثابت در انتقال جرم مدل خوبی نباشد و مدل‌های بهتری وجود داشته باشد چون باید این نکته را در نظر بگیریم که همیشه $m_۱$ باید از $m_۲$ بیشتر باشد تا جهت انتقال جرم درست باشد. برای همین یک مدل دیگر این است که انتقال جرم وابسته به اختلاف جرم دو مولفه باشد یعنی: $\dot{m} = \alpha(m_۱ - m_۲)$ که در آن α یک ثابت است.

پس:

$$\dot{m}(t) = \alpha\left(m_{۱,.} - \int_{t.}^{t} \dot{m}(t)\, dt - \left[m_{۲,.} - \int_{t.}^{t} \dot{m}(t)\, dt\right]\right)$$

که $m_{۱,.}$ و $m_{۲,.}$ جرم اولیه دو مولفه است:

$$\dot{m}(t) = \alpha\left(\Delta m. - ۲\int_{t.}^{t} \dot{m}(t)\, dt\right) \Rightarrow \frac{d\dot{m}(t)}{dt} = -۲\alpha\dot{m}(t) \Rightarrow \dot{m}(t) = \dot{m}.\, e^{-۲\alpha(t-t.)}$$

حال برای این حالت باقی مساله را حل می‌کنیم:

$$\vec{V}_{CM} = \int_{t.}^{t} \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} dt = \sqrt{\frac{G}{MD}}\, \dot{m}.\, \int_{t.}^{t} e^{-۲\alpha(t-t.)}[-\sin[\omega(t-t.)]\ \hat{\imath} + \cos[\omega(t-t.)]\ \hat{\jmath}]\, dt$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{CM} = \sqrt{\frac{G}{MD}}\dot{m}.\left(\frac{e^{-۲\alpha(t-t.)}[\omega\cos\omega(t-t.) + ۲\alpha\sin\omega(t-t.)]}{۴\alpha^۲ + \omega^۲}\ \hat{\imath} + \frac{e^{-۲\alpha(t-t.)}[\omega\sin\omega(t-t.) - ۲\alpha\cos\omega(t-t.)]}{۴\alpha^۲ + \omega^۲}\ \hat{\jmath}\right)$$

برای راحتی محاسبات $\frac{\alpha}{\omega}$ را برابر k در نظر می‌گیریم پس:

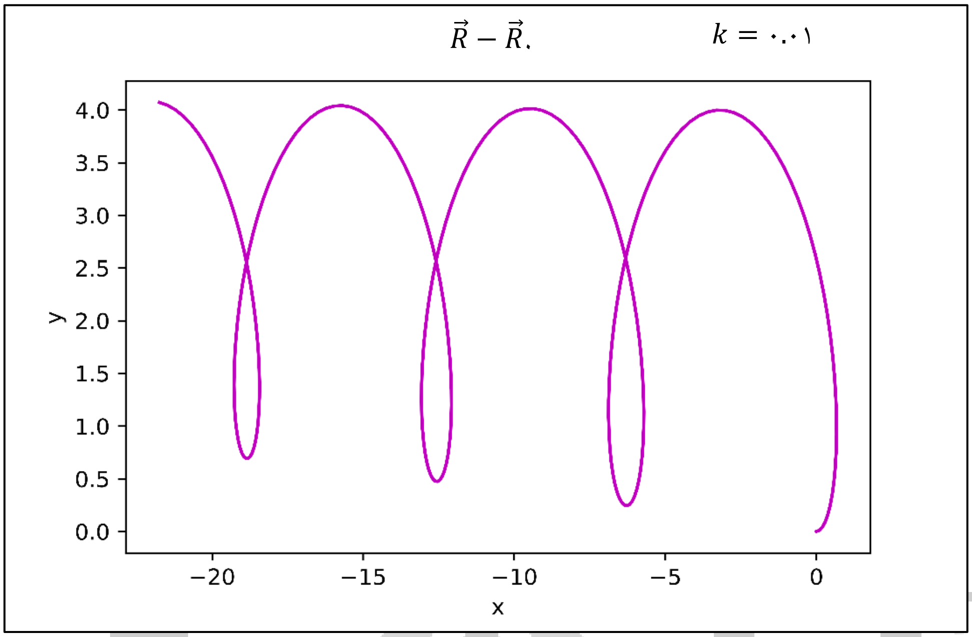
$$d\vec{R} = \frac{D}{M}\ \dot{m}.\ \left[\left(\frac{e^{-۲\alpha(t-t.)}[\cos\omega(t-t.) + ۲k\sin\omega(t-t.)]}{۴k^۲ + ۱} + \cos\omega(t-t.)\right)\hat{\imath} + \left(\frac{e^{-۲\alpha(t-t.)}[\sin\omega(t-t.) - ۲k\cos\omega(t-t.)]}{۴k^۲ + ۱} + \sin\omega(t-t.)\right)\hat{\jmath}\right] dt$$

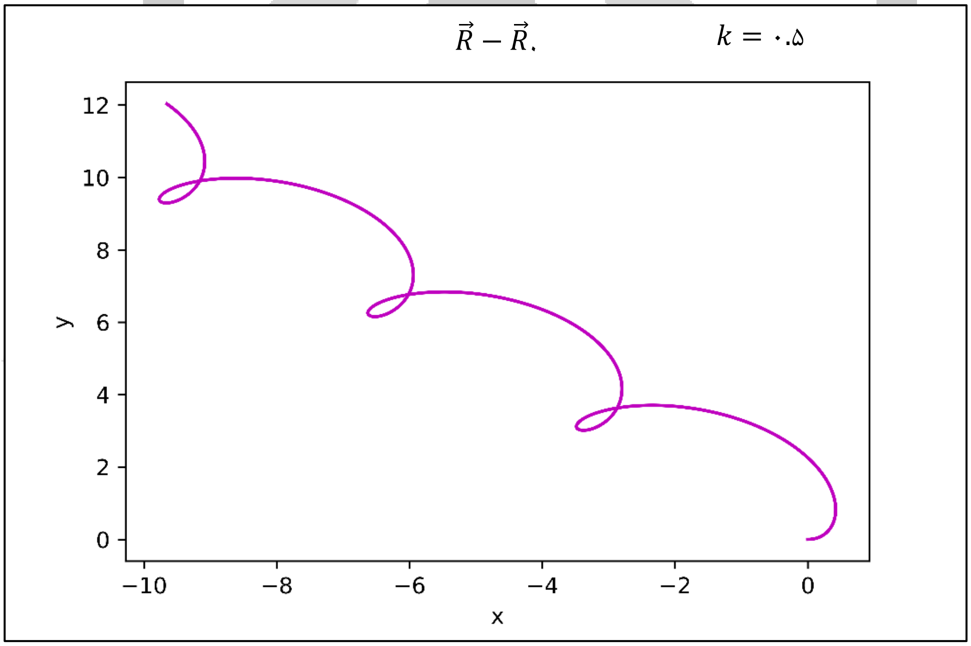
پس از انتگرال گیری:

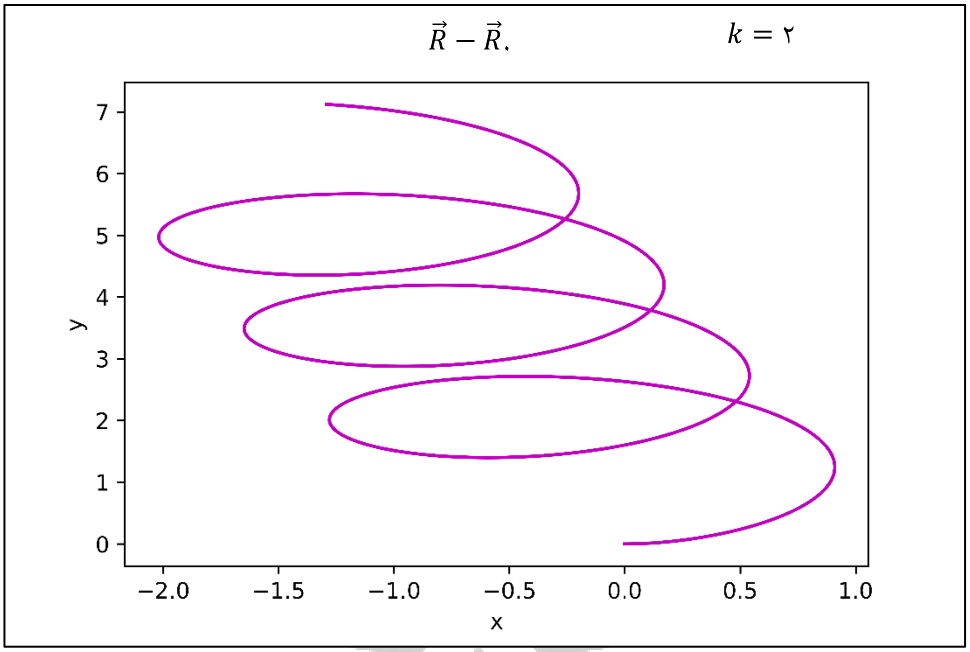
$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{D}{M\omega}\dot{m}.\left(\frac{e^{-۲\alpha(t-t.)}\sin\omega(t-t.)}{(۴k^۲ + ۱)^۲} - \frac{\omega(t-t.)}{۴k^۲ + ۱} + \sin\omega(t-t.)\right)\hat{\imath}$$

$$+ \frac{D}{M\omega}\dot{m}.\left(\frac{e^{-۲\alpha(t-t.)}[(۴k^۲ - ۱)\ \cos\omega(t-t.) - ۴k\sin\omega(t-t.)] - (۴k^۲ - ۱)}{(۴k^۲ + ۱)^۲} + \frac{۲k\omega(t-t.)}{۴k^۲ + ۱} - \cos\omega(t-t.) + ۱\right)\hat{\jmath}$$

حال بردار مرکز جرم را برای مقادیر مختلف k رسم می کنیم:







اما برای بدست آوردن بردار دو مولفه نیز مطابق بخش قبل عمل می‌کنیم:

$$\vec{r}_{۱}(t)=\frac{D}{M}(\cos\omega(t-t_{.})\,\hat{\imath}+\sin\omega(t-t_{.})\,\hat{\jmath})\left[-m_{۲,.}-\int_{t_{.}}^{t}\dot{m}(t)dt\right]$$

تا این بخش دقیقا معادلات مطابق بخش قبل است ولی در بخش قبل از اینجا به بعد نرخ انتقال جرم را ثابت گرفتیم و اینجا باید $\dot{m}(t)=\dot{m}_{.}e^{-۲\alpha(t-t_{.})}$ بگیریم.

$$\vec{r}_{۱}(t)=-\frac{D}{M}(\cos\omega(t-t_{.})\,\hat{\imath}+\sin\omega(t-t_{.})\,\hat{\jmath})\left[m_{۲,.}+\dot{m}_{.}\int_{t_{.}}^{t}e^{-۲\alpha(t-t_{.})}dt\right]$$

$$\Rightarrow\vec{r}_{۱}(t)=-\frac{D}{M}(\cos\omega(t-t_{.})\,\hat{\imath}+\sin\omega(t-t_{.})\,\hat{\jmath})\left[m_{۲,.}+\frac{\dot{m}_{.}}{۲\alpha}(۱-e^{-۲\alpha(t-t_{.})})\right]$$

پس $\vec{R}_{۱}(t)$ به این صورت خواهد بود:

$$\Rightarrow\vec{R}_{۱}(t)=\vec{R}_{.}+\frac{D}{M\omega}\dot{m}_{.}\left(\frac{e^{-۲\alpha(t-t_{.})}\sin\omega(t-t_{.})}{(۴k^{۲}+۱)^{۲}}-\frac{\omega(t-t_{.})}{۴k^{۲}+۱}+\sin\omega(t-t_{.})\right)\hat{\imath}$$

$$+\frac{D}{M\omega}\dot{m}_{.}\left(\frac{e^{-۲\alpha(t-t_{.})}[(۴k^{۲}-۱)\cos\omega(t-t_{.})-۴k\sin\omega(t-t_{.})]-(۴k^{۲}-۱)}{(۴k^{۲}+۱)^{۲}}+\frac{۲k\omega(t-t_{.})}{۴k^{۲}+۱}\right.$$
$$\left.-\cos\omega(t-t_{.})+۱\right)\hat{\jmath}$$

$$-\frac{D}{M}(\cos\omega(t-t_{.})\,\hat{\imath}+\sin\omega(t-t_{.})\,\hat{\jmath})\left[m_{۲,.}+\frac{\dot{m}_{.}}{۲\alpha}(۱-e^{-۲\alpha(t-t_{.})})\right]$$

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_0 + \frac{D}{M\omega}\dot{m}\left[\frac{e^{-2\alpha(t-t_0)}\sin\omega(t-t_0)}{(4k^2+1)^2} - \frac{\omega(t-t_0)}{4k^2+1} + \sin\omega(t-t_0) - \left(\frac{m_{2,0}}{\dot{m}_0} + \frac{\left(1-e^{-2\alpha(t-t_0)}\right)}{2\alpha}\right)\omega\cos\omega(t-t_0)\right]\hat{\imath}$$

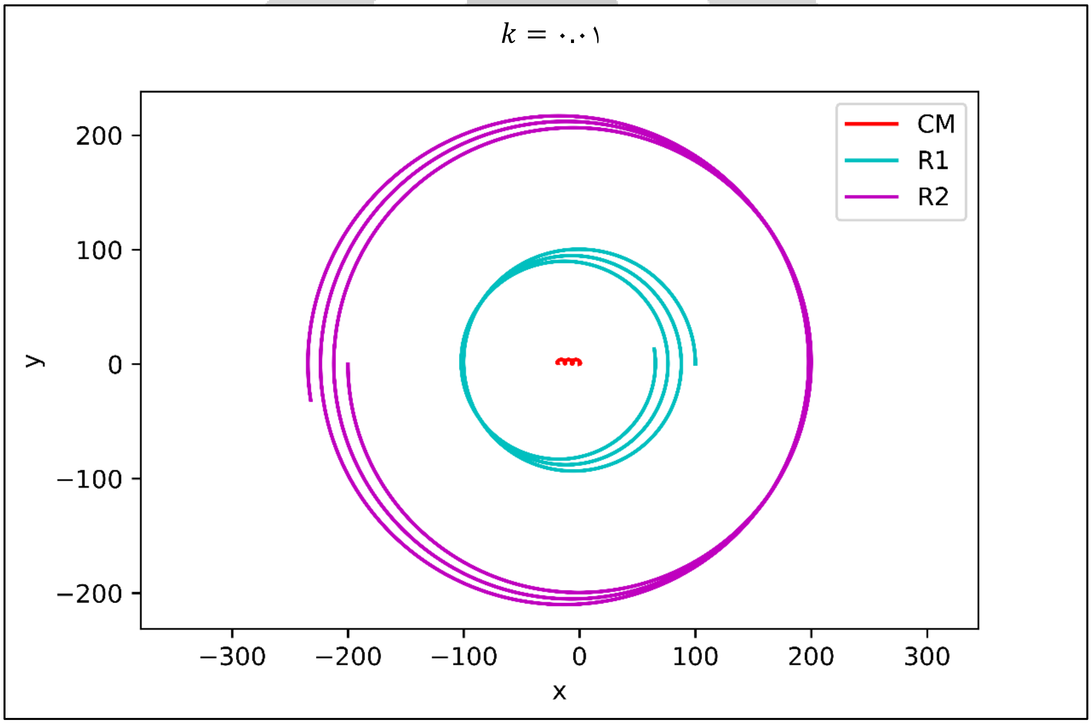
$$+\frac{D}{M\omega}\dot{m}\left[\frac{e^{-2\alpha(t-t_0)}[(4k^2-1)\cos\omega(t-t_0) - 4k\sin\omega(t-t_0)] - (4k^2-1)}{(4k^2+1)^2} + \frac{2k\omega(t-t_0)}{4k^2+1} - \cos\omega(t-t_0) + 1 - \left(\frac{m_{2,0}}{\dot{m}_0} + \frac{\left(1-e^{-2\alpha(t-t_0)}\right)}{2\alpha}\right)\omega\sin\omega(t-t_0)\right]\hat{\jmath}$$

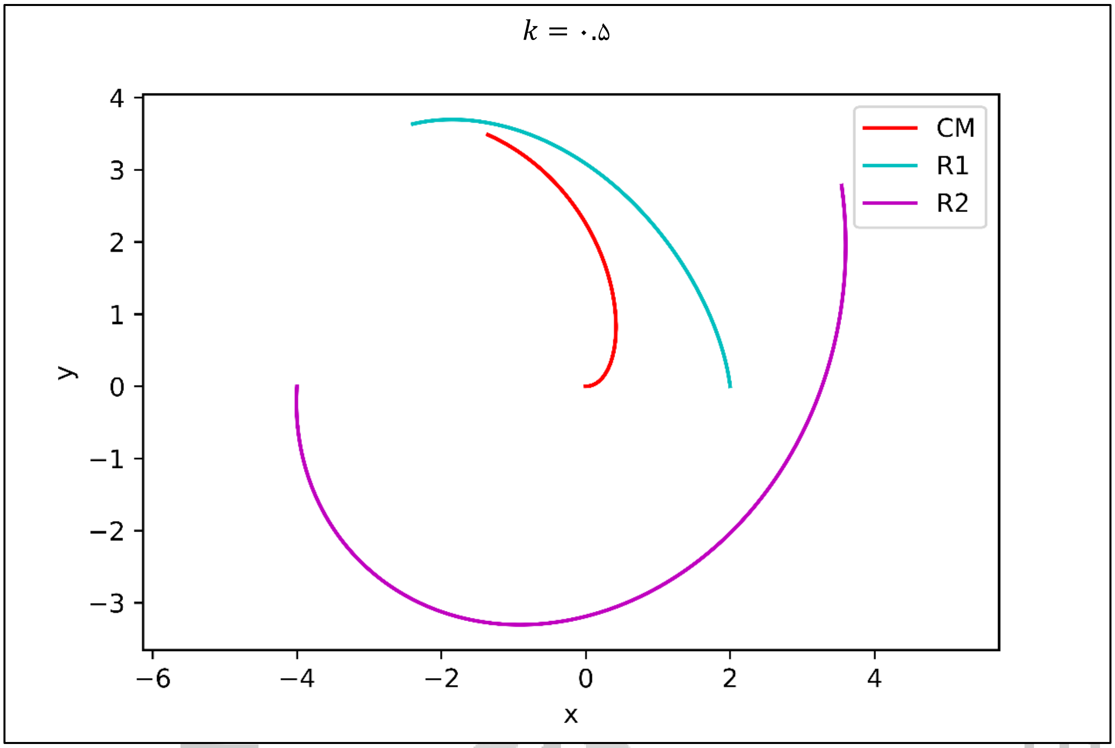
و برای مولفه دوم:

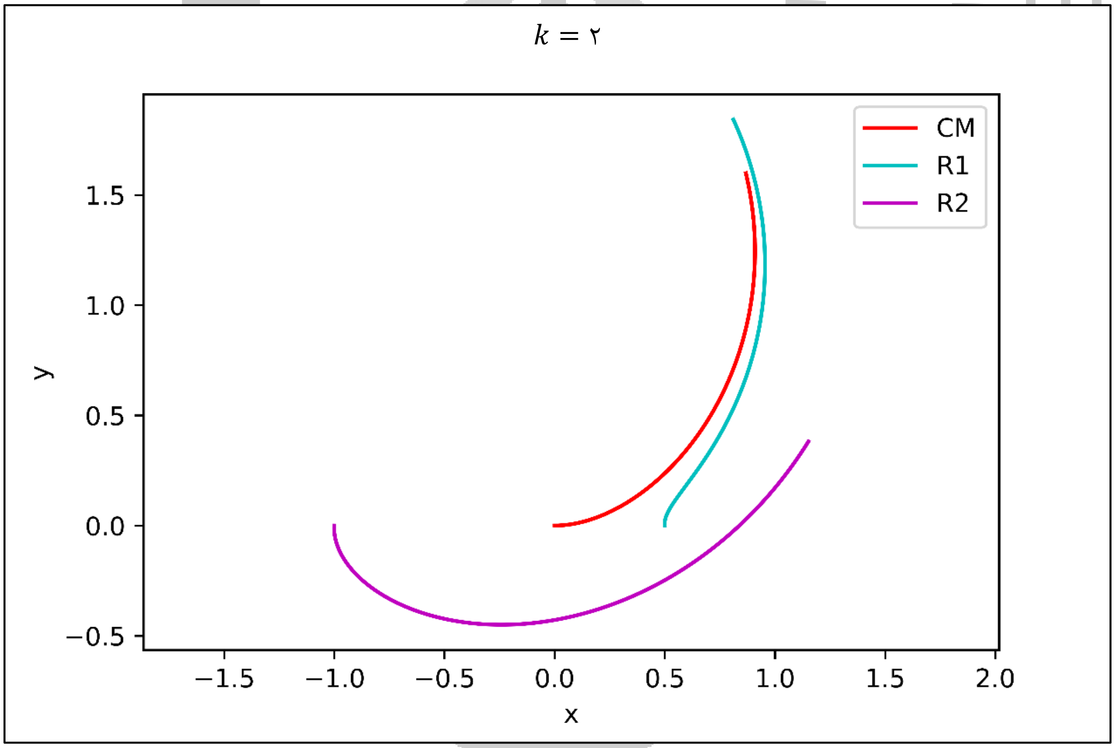
$$\vec{R}_2 = \vec{R}_0 + \frac{D}{M\omega}\dot{m}\left[\frac{e^{-2\alpha(t-t_0)}\sin\omega(t-t_0)}{(4k^2+1)^2} - \frac{\omega(t-t_0)}{4k^2+1} + \sin\omega(t-t_0) + \left(\frac{m_{1,0}}{\dot{m}_0} - \frac{\left(1-e^{-2\alpha(t-t_0)}\right)}{2\alpha}\right)\omega\cos\omega(t-t_0)\right]\hat{\imath}$$

$$+\frac{D}{M\omega}\dot{m}\left[\frac{e^{-2\alpha(t-t_0)}[(4k^2-1)\cos\omega(t-t_0) - 4k\sin\omega(t-t_0)] - (4k^2-1)}{(4k^2+1)^2} + \frac{2k\omega(t-t_0)}{4k^2+1} - \cos\omega(t-t_0) + 1 + \left(\frac{m_{1,0}}{\dot{m}_0} - \frac{\left(1-e^{-2\alpha(t-t_0)}\right)}{2\alpha}\right)\omega\sin\omega(t-t_0)\right]\hat{\jmath}$$

حال برای چند حالت مختلف نرخ انتقال جرم، مسیر مرکز جرم و دو مولفه را رسم می‌کنیم. $\frac{m_1}{m_2} = 2$ و حرکت تا قبل از انتقال تمام جرم یک مولفه رسم شده است. جهت چرخش پادساعتگرد و در t_0 اجرام روی خط $y = 0$ قرار دارند:




$k = ۰.۵$
CM
R1
R2
x
y


$k = ۲$
CM
R1
R2
x
y

تا اینجا حل مفصلی برای یک انتقال جرم پیوسته مشاهده کردید. به عنوان بخش پایانی می‌خواهیم آخرین ابزار حل مسائل فیزیکی را استفاده کنیم: استفاده از اختلال و بسط روابط.

هدررفت پیوسته جرم با چاشنی اختلال

حالتی را در نظر بگیرید که یکی از جرم ها بسیار سنگین تر از جرم دیگر است و در ابتدا جرم سبک در مداری دایروی به دور جرم سنگین دوران می‌کند و بعد از لحظه اولیه فقط جرم سنگین تر اتلاف جرم دارد و فرض دیگر اینکه کاهش جرم مولفه سنگین‌تر بسیار کوچک‌تر از خود آن جرم است که همگی این فرض ها منطقی هستند و حتی می توان برای این حالت مثال‌هایی نزدیک به واقعیت زد: در نظر بگیرید یک سیاره جامد کوچک به دور یک ستاره سنگین در حال دوران است. جرم سیاره با گذر زمان ثابت باقی می‌ماند ولی ستاره به دلایل مختلفی مثل باد ستاره‌ای یا سوزاندن جرم با آهنگی بسیار آرام جرم از دست می‌دهد که طبعا تغییرات جرم آن هم بسیار کوچک تر از خود جرم آن خواهد بود. جرم سنگین را با M و جرم کوچک را با m نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم مرکز جرم منطبق بر مولفه سنگین است. حال معادله نیرو را می‌نویسیم:

$$F = -\frac{GMm}{r^۲} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲\right) \ , \qquad M \gg m$$

قبلا بحث کردیم که نیروی وارده همچنان شعاعی است پس تکانه زاویه‌ای پایسته باقی می‌ماند:

$$h = r^۲\dot{\theta} = const. \ , \qquad r\dot{\theta}^۲ = \frac{h^۲}{r^۳}$$

$$-\frac{GM}{r^۲} = \ddot{r} - \frac{h^۲}{r^۳}$$

حالا به سراغ M می رویم و تابع آهنگ تغییرات جرم را حالت کلی در نظر می‌گیریم ولی فرض می‌کنیم که این آهنگ تغییرات فقط تابع زمان است.

$$M_{(t)} = M_{(t.)} + \int_{t.}^{t} \dot{M}\, dt$$

فرض می‌کنیم M کمی از حالت اولیه خود یعنی $M.$ مختل شود همچنین فاصله دو جسم هم به مقدار کوچکی تغییر کند:

$$M = M. + \delta M = M.\left(۱ + \frac{\delta M}{M.}\right)$$

$$r = r. + \delta r = r.\left(۱ + \frac{\delta r}{r.}\right)$$

$$\ddot{r} = \ddot{\delta r} \quad , \quad \frac{\delta r}{r.}, \frac{\delta M}{M.} \ll ۱$$

$$-\frac{G(M. + \delta M)}{(r. + \delta r)^۲} = \ddot{\delta r} - \frac{h^۲}{(r. + \delta r)^۳}$$

$$-\frac{GM_{۰}}{r_{۰}^{۲}}\times\frac{\left(۱+\frac{\delta M}{M_{۰}}\right)}{\left(۱+\frac{\delta r}{r_{۰}}\right)^{۲}}=\ddot{\delta r}-\frac{h^{۲}}{r_{۰}^{۳}}\times\left(۱+\frac{\delta r}{r_{۰}}\right)^{-۳}$$

$$x\ll ۱\Rightarrow\ (۱+x)^{n}=۱+nx$$

$$\Rightarrow-\frac{GM_{۰}}{r_{۰}^{۲}}\left(۱+\frac{\delta M}{M_{۰}}\right)\left(۱-۲\frac{\delta r}{r_{۰}}\right)=\ddot{\delta r}-\frac{h^{۲}}{r_{۰}^{۳}}\left(۱-۳\frac{\delta r}{r_{۰}}\right)$$

$$\frac{\delta M}{M_{۰}}\times\frac{\delta r}{r_{۰}}\approx ۰$$

$$-\frac{GM_{۰}}{r_{۰}^{۲}}\left(۱-۲\frac{\delta r}{r_{۰}}+\frac{\delta M}{M_{۰}}\right)=\ddot{\delta r}-\frac{h^{۲}}{r_{۰}^{۳}}\left(۱-۳\frac{\delta r}{r_{۰}}\right)$$

و از معادله حالت پایه مدار دایروی می‌دانیم که:

$$\frac{GM_{۰}}{r_{۰}^{۲}}=\frac{h^{۲}}{r_{۰}^{۳}}\ \Rightarrow\ \frac{GM_{۰}}{r_{۰}^{۲}}\left(۱-۲\frac{\delta r}{r_{۰}}+\frac{\delta M}{M_{۰}}\right)=-\ddot{\delta r}+\frac{GM_{۰}}{r_{۰}^{۲}}\left(۱-۳\frac{\delta r}{r_{۰}}\right)$$

$$\frac{GM_{۰}}{r_{۰}^{۳}}\equiv\omega^{۲}$$

$$\boxed{\ddot{\delta r}+\ \omega^{۲}\delta r=-\frac{G}{r_{۰}^{۲}}\delta M_{(t)}}$$

حال با ساده سازی جواب در نهایت به یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی درجه ۲ و ناهمگن رسیدیم که برای حل آن باید تابع $\delta M_{(t)}$ را بدست بیاوریم.

به سراغ معادله انتگرالی که پیش‌تر نوشتیم می‌رویم و فرض اختلالی را در معادله تاثیر می‌دهیم:

$$\delta M_{(t)}=\int_{t_0}^{t}\dot{M}\,dt$$

به ازای توابع مختلف $\delta M_{(t)}$ معادله دیفرانسیل ما حل های مختلفی خواهد داشت که می‌خواهیم برای چند مثال تابعی آن‌را حل کنیم و نتایج را بررسی کنیم.

اما قبل از این که به سراغ حالت بندی ها و حل معادله برویم باید مقداری درباره معادلات دیفرانسیل ($differential\ equation$) بدانیم.

نگاهی اجمالی به معادلات دیفرانسیل

به مجموعه معادلاتی که در آن‌ها یک یا چند متغیر وابسته به همراه مشتق های با مرتبه مختلفشان و متغیرهای مستقلی ظاهر می‌شوند، معادلات دیفرانسیل می‌گویند. گاهی می‌توان با بازکردن مشتقات، معادله را به جای مشتقات بر حسب خود دیفرانسیل‌ها نوشت. معادلات دیفرانسیل در بسیاری پدیده‌های علوم رخ می‌دهند. هر زمان که یک رابطه بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود دارد و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌های مختلف یا حالات مختلف شناخته شده‌است می‌توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل بیان کرد.

حل این معادلات بسیار وابسته به نوع آن‌ها است، به همین دلیل دسته‌بندی‌های متعددی برای این معادلات به وجود آمده‌است. درجه معادله دیفرانسیل از اولین ویژگی هایی است که برای آن تعریف می شود. درجه معادله دیفرانسیل برابر با مرتبه بزرگترین مرتبه مشتقی که در معادله وجود دارد است. برای مثال معادله دیفرانسیل هماهنگ ساده ($y'' + \omega^۲ y = ۰$) یک معادله دیفرانسیل درجه ۲ است. توجه داشته باشید y' و y'' نماد فشرده مشتق گیری است به طوری که $y' = \frac{dy}{dx}$ است.

به طور کلی این معادلات به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- ✓ معادلات دیفرانسیل معمولی ($Ordinary\ Differential\ Equation$)
- ✓ معادلات دیفرانسیل جزئی یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای ($Partial\ Differential\ Equations$) یا به اختصار PDE.

معادله دیفرانسیل معمولی به معادله‌ای گفته می‌شود که در آن تابعی از تنها یک متغیر مستقل و مشتقات آن تابع نقش داشته باشند. عبارت معمولی در مقابل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار می‌رود. در معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی دو یا چند متغیر وجود دارد. این معادلات شامل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل است که در آنها توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق پاره‌ای توابع نسبت به آن متغیرها شرکت داشته‌باشند. به این دسته از معادلات دیفرانسیل، «معادلات دیفرانسیل پاره‌ای»، «معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی»، یا «معادلات دیفرانسیل جزئی» گفته می‌شود.

معادلات دیفرانسیل معمولی به دو دسته خطی ($Linear\ differential\ equation$) و غیرخطی ($Nonlinear\ differential\ equation$) تقسیم می‌شوند. در صورتی که متغیر وابسته (همان متغیری که تابع متغیر دیگر است.) یا مشتقات آن به توان برسند یا در هم ضرب شوند معادله دیفرانسیل غیرخطی می‌شود و در غیر این صورت یعنی حالتی که توان همه آن‌ها یک باشد و در هم ضرب نشوند معادله دیفرانسیل خطی است. برای مثال معادله دیفرانسیل $y'^۲ + ۳y + x^۴ + ۲ = ۰$ یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه ۲ و غیرخطی است که در آن y متغیر وابسته و x متغیر مستقل است. دلیل غیرخطی شدن این معادله دیفرانسیل وجود جمله $y'^۲$ است.

جواب‌های یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی را می‌توان با عدد ثابتی جمع یا در عدد ثابتی ضرب کرد. این دسته از معادلات به طور کامل و دقیق شناخته و بررسی شده‌اند و جواب‌های بسته تحلیلی برایشان وجود دارد. خاصیت جمع‌پذیری جواب‌ها برای معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی صادق نیست.

حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی در حالت کلی پیچیده‌تر است و به ندرت می‌توان برای آن‌ها جوابی بسته بر اساس توابع مقدماتی ریاضی یافت. در عوض برای چنین معادلاتی، می‌توان جواب‌هایی به صورت سری یا به فرم انتگرالی پیدا کرد. علاوه بر این،

می‌توان به کمک روش‌های عددی یا گرافیکی، که دستی یا رایانه‌ای قابل پیاده‌سازی‌اند، جواب معادلات دیفرانسیل غیرخطی را تخمین زد. این روش‌های تخمینی می‌توانند در غیاب جواب‌های تحلیلی و بسته، اطلاعات مفیدی در اختیار بگذارند.

همانطور که پیش‌تر گفتیم از نماد فشرده برای نمایش مشتق استفاده می‌کنیم و برای مرتبه دلخواه n داریم:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

حال اگر بخواهیم حالتی کلی از معادله دیفرانسیل معمولی صریح از مرتبه n (درجه n) بنویسیم به این صورت نمایش داده می‌شود:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = ۰$$

که F یک تابع معین و دلخواه از x و y و مشتقات y است.

ویژگی دیگری که برای معادلات دیفرانسیل تعریف می‌شود همگنی یا غیرهمگنی معادله است.

ابتدا تعریف تابع همگن ($Homogeneous\ function$) را بررسی می‌کنیم. برای مثال تابع ۲ متغیره f را همگن می‌نامیم اگر:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$$

حال به همین صورت می‌خواهیم برای معادله دیفرانسیل، «همگنی» تعریف کنیم. تابع F را که قبلا با آن کار کردیم را به یاد بیاورید. هرگاه برای این تابع F داشته باشیم:

$$F\left(x, \alpha y, \alpha y', \alpha y'', \dots, \alpha y^{(n)}\right) = \alpha^n F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right)$$

می‌گوییم این معادله دیفرانسیل همگن ($Homogeneous\ differential\ equation$) است.

به عنوان مثال معادله دیفرانسیل هماهنگ ساده را درنظر بگیرید:

$$F(x, y, y', y'') = y'' + \omega^۲ y = ۰$$

حالا ویژگی همگنی را بررسی می‌کنیم:

$$F(x, \alpha y, \alpha y', \alpha y'') = \alpha y'' + \omega^۲ \alpha y = \alpha(y'' + \omega^۲ y) = \alpha F(x, y, y', y'')$$

که نشان دادیم، این معادله دیفرانسیل همگن است. به عنوان مثالی دیگر شما همگنی معادله $y'^۲ + ۳y + x^۴ + ۲ = ۰$ را بررسی کنید.

باز هم تابع $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = ۰$ را که یک معادله دیفرانسیل معمولی صریح از مرتبه n است، را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم این معادله را به صورت حالت کلی و خطی بنویسیم خواهیم داشت:

$$F\left(x, \alpha y, \alpha y', \alpha y'', \dots, \alpha y^{(n)}\right) = a_n y^{(n)} + a_{n-۱} y^{(n-۱)} + \dots + a_۲ y'' + a_۱ y' + a_. y - g(x) = ۰$$

که در آن $g(x)$ یک تابع دلخواه از x است و می‌توان حالت کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه n خطی را به صورت قابل فهم‌تر زیر نشان داد:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-۱} y^{(n-۱)} + \cdots + a_۲ y'' + a_۱ y' + a_. y = g(x)$$

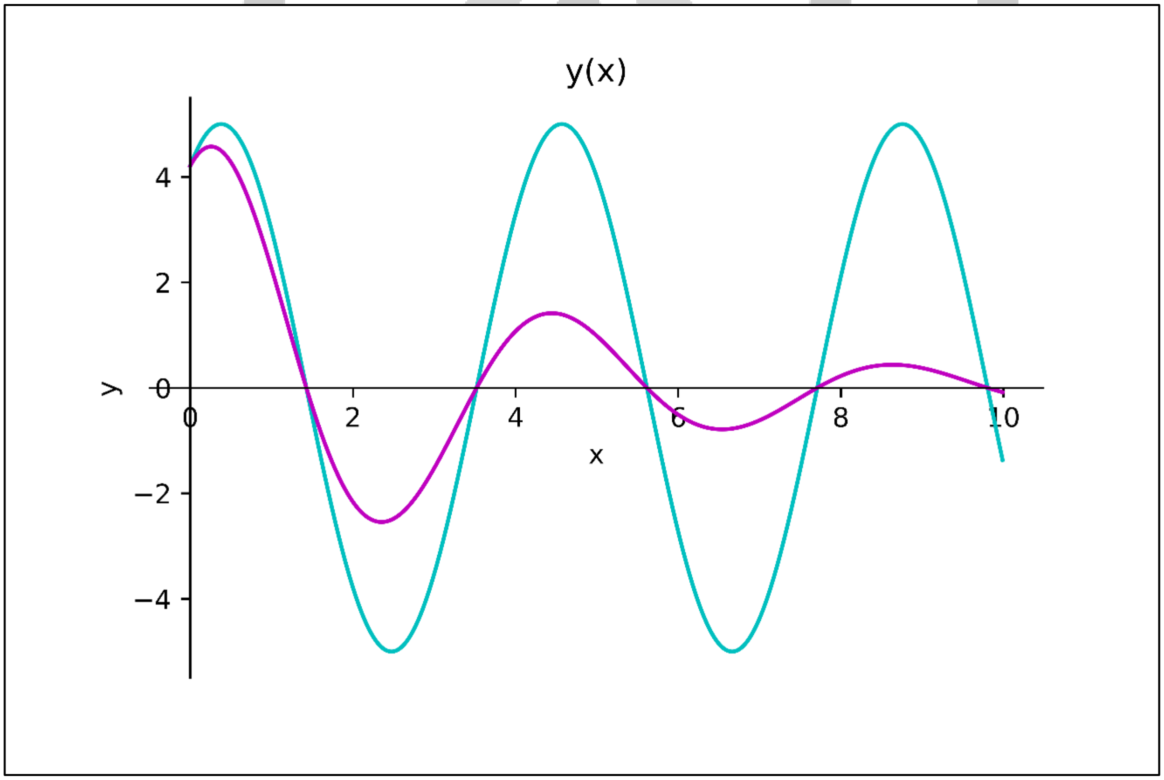
حالا برای همگن کردن این معادله کافی است $g(x)$ را صفر کنیم، پس معادله دیفرانسیل:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-۱} y^{(n-۱)} + \cdots + a_۲ y'' + a_۱ y' + a_. y = ۰$$

حالت کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه n خطی و همگن است.

به عنوان مثال اگر $n = ۲$ باشد و هیچ‌کدام از ضرایب $a_۲$ و $a_۱$ و $a_.$ صفر نباشند معادله دیفرانسیل نوسانگر میرا خواهیم داشت و اگر $a_۱$ صفر باشد به معادله معروف نوسانگر هماهنگ یا همان هماهنگ ساده تبدیل می‌شود.

برای شهود بیشتر به تغییرات یک معادله دیفرانسیل درصورت حذف یک جمله با مرتبه خاص، $y(x)$ برای نوسانگر میرا و هماهنگ ساده در ادامه رسم شده‌اند.



تا حدی دسته‌بندی‌ها و انواع معادلات دیفرانسیل را دیدیم اما مسئله مهم و دشوار، حل معادلات دیفرانسیل است که بسته به نوع معادله حل‌ها بسیار متفاوت، متنوع و گسترده‌اند ولی به طور کلی حل معادلات به سه روش تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی انجام می‌شوند.

برخی از معادلات دارای پاسخ دقیق و فرم تابعی هستند اینگونه معادلات را می‌توان از روش‌های تحلیلی حل نمود و به پاسخ دقیق رسید. معادلات دیگر که دارای فرم تابع مشخص نیستند را باید توسط روش‌های نیمه‌تحلیلی یا عددی حل کرد. از روش‌های نیمه‌تحلیلی می‌توان به روش تجزیه آدومیان، آنالیز هموتوپی، تبدیل دیفرانسیل و... اشاره کرد. روش‌های عددی دامنه وسیع‌تری را برای حل معادلات به کار می‌گیرند. از روش‌های عددی می‌توان به روش اویلر، روش هون، روش تیلور، روش رانگ-کوتا، آدامز-بشفورث-مولتون، روش میلن سیمپسون، روش هامینگ، روش رانگ-کوتا فلبرگ مرتبه ۵، روش رحمان‌زاده کای وایت، روش‌های طیفی و شبه طیفی، روش‌های شبکه‌ای همانند اجزای محدود و تفاضل محدود و روش‌های بدون شبکه اشاره کرد.

در ادامه با مفاهیمی مانند جواب خصوصی و عمومی معادله دیفرانسیل آشنا می‌شوید که در حل معادلات به ما کمک می‌کنند.

حالا تا حد قابل قبولی با معادلات دیفرانسیل آشنا شدید و زمان آن است که به سراغ معادله خودمان برویم و حل های آن‌را بررسی کنیم.

$$\ddot{\delta r} + \omega^{2}\delta r = -\frac{G}{r_{0}^{2}}\delta M_{(t)}$$

برای ساده سازی، معادله دیفرانسیل را به صورت زیر می نویسیم:

$$\delta r \equiv x \quad , \quad f_{(t)} \equiv -\frac{G}{r_{0}^{2}}\delta M_{(t)} = -\frac{G}{r_{0}^{2}}\left(\int_{t_{0}}^{t} \dot{M}\, dt\right)$$

$$\ddot{x} + \omega^{2}x = f_{(t)}$$

حل حالت کلی این معادله دیفرانسیل به پیش نیازهایی احتیاج دارد که کاملا خارج از فضای المپیاد است. پس ما چند حالت خاص جالب و با توابع معروف را حل می کنیم ولی نکته مهم این است که حل معادلات دیفرانسیل در این سطح، از اهداف المپیاد نیست و عملا در این بخش فیزیک بر نجوم غالب است.

چند مثال با تابع خاص فرض شده برای این معادله دیفرانسیل در ادامه حل شده‌اند.

۱- تابع توانی درجه ۳ :

این تابع حاصل یک تابع توانی درجه ۲ برای $\dot{M}$ است.

$$f_{(t)} = -(at^{۳} + bt^{۲} + ct + d)$$

که برای ساده‌تر شدن کار در ادامه همه ضرایب منفی تعریف شده‌اند. معادله را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$\ddot{x} + \omega^{۲}x + at^{۳} + bt^{۲} + ct + d = ۰$$

برای این معادله می‌خواهیم از تغییرمتغیر استفاده کنیم. درنظر بگیرید:

$$\omega^{۲}x + at^{۳} + bt^{۲} + ct + d \equiv y$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \omega^{۲}\dot{x} + ۳at^{۲} + ۲bt + c$$

$$\ddot{y} = \omega^{۲}\ddot{x} + ۶at + ۲b \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{\ddot{y} - ۶at - ۲b}{\omega^{۲}}$$

$$\frac{\ddot{y} - ۶at - ۲b}{\omega^{۲}} + y = ۰ \ \Rightarrow \quad \ddot{y} + \omega^{۲}y - ۶at - ۲b = ۰ \ *$$

حال تغییرمتغیری مشابه قبل تکرار می‌کنیم:

$$\omega^{۲}y - ۶at - ۲b \equiv z$$

$$\dot{z} = \omega^{۲}\dot{y} - ۶a \quad , \quad \ddot{z} = \omega^{۲}\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\ddot{z}}{\omega^{۲}}$$

و از معادله * می‌دانیم:

$$\ddot{y} + z = ۰ \Rightarrow \ \frac{\ddot{z}}{\omega^{۲}} + z = ۰ \Rightarrow \ \ddot{z} + \omega^{۲}z = ۰$$

حال به معادله دیفرانسیل معروف هماهنگ ساده رسیدیم که جواب آن به صورت زیر است:

$$\ddot{z} + \omega^{۲}z = ۰ \Rightarrow \quad z = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$$

برای یافتن جواب نهایی باید متغیر ها را بر حسب هم بنویسیم:

$$z = \omega^{۲}y - ۶at - ۲b$$

$$y = \frac{z + ۶at + ۲b}{\omega^{۲}}$$

$$y = \omega^{۲}x + at^{۳} + bt^{۲} + ct + d$$

$$x = \frac{y - (at^{۳} + bt^{۲} + ct + d)}{\omega^{۲}}$$

$$x = \frac{\frac{z + ۶at + ۲b}{\omega^۲} - (at^۳ + bt^۲ + ct + d)}{\omega^۲}$$

$$x = \frac{\frac{A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + ۶at + ۲b}{\omega^۲} - (at^۳ + bt^۲ + ct + d)}{\omega^۲}$$

$$x = \frac{A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + ۶at + ۲b - \omega^۲(at^۳ + bt^۲ + ct + d)}{\omega^۴}$$

که ثوابت A و B از شرایط اولیه مسئله بدست می‌آیند. با تعریف کردن ثوابت جدید برای بررسی فرم جواب داریم:

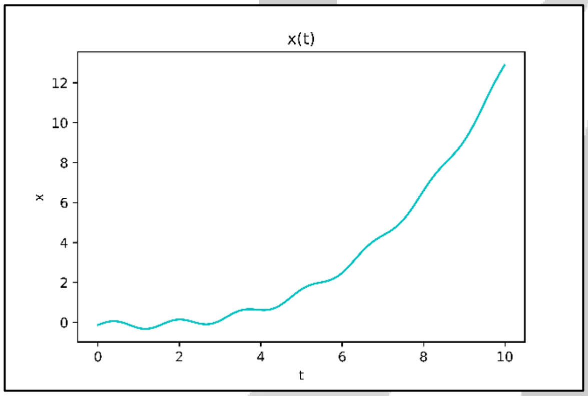
$$\boxed{x = A'\sin(\omega t) + B'\cos(\omega t) + \alpha t^۳ + \beta t^۲ + \gamma t + \delta}$$

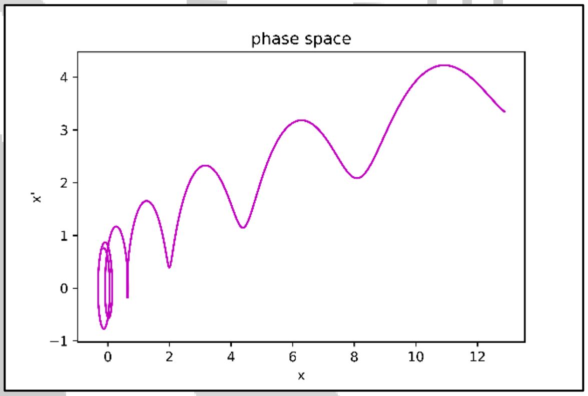
در ادامه نمودارهایی با مثال عددی رسم می‌کنیم تا شهود بهتری نسبت به جواب پیدا کنید:

می خواهیم به ازای اعداد زیر نمودار را رسم کنیم:

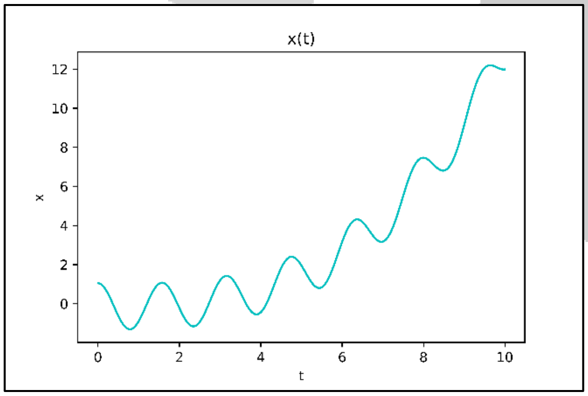
$$\omega = ۴ , a = -۰.۲ , b = -۰.۱ , c = ۰.۳ , d = ۲$$

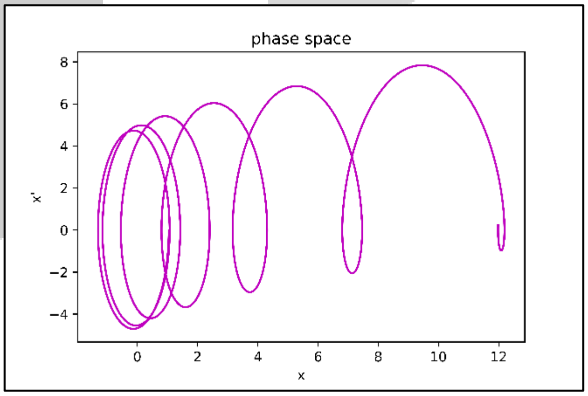
حالت ۱ به ازای: $A = ۵۰ , B = ۰$





حالت ۲ به ازای: $A = ۰ , B = ۳۰۰$





۲-تابع نمایی :

این تابع از یک تابع نمایی دیگر برای $\dot{M}$ بدست می‌آید.

$$f_{(t)} = ae^{bt}$$

$$\ddot{x} + \omega^{۲}x = ae^{bt}$$

جواب معادله همگن شده معادله بالا یا همان هماهنگ ساده یعنی $\ddot{x} + \omega^{۲}x = ۰$ به صورت $x = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$ است. ما باید جمله ای با این جواب جمع کنیم که در معادله ناهمگن صدق کند. از آنجا که می دانیم مشتقات تابع نمایی همچنان تابعی نمایی است، پس یک جمله نمایی کلی به جواب اضافه می کنیم:

$$x = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t) + Ce^{\lambda t}$$

که باید ثوابت C و λ را که خودمان تعریف کردیم بر حسب ثوابتی که داریم بدست آوریم. قیدی که داریم این است که معادله $\ddot{x} + \omega^{۲}x = ae^{bt}$ باید برقرار باشد:

$$\ddot{x} = -\omega^{۲}\big(Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)\big) + \lambda^{۲}Ce^{\lambda t}$$

$$-\omega^{۲}\big(Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)\big) + \lambda^{۲}Ce^{\lambda t} + \omega^{۲}\big(Asin(\omega t) + Bcos(\omega t) + Ce^{\lambda t}\big) = ae^{bt}$$

$$ae^{bt} = \lambda^{۲}Ce^{\lambda t} + \omega^{۲}Ce^{\lambda t} = Ce^{\lambda t}(\lambda^{۲} + \omega^{۲})$$

از این معادله می توانیم نتیجه بگیریم:

$$\lambda = b$$

$$a = C(\lambda^{۲} + \omega^{۲}) \;\Rightarrow\; C = \frac{a}{\lambda^{۲} + \omega^{۲}} = \frac{a}{b^{۲} + \omega^{۲}}$$

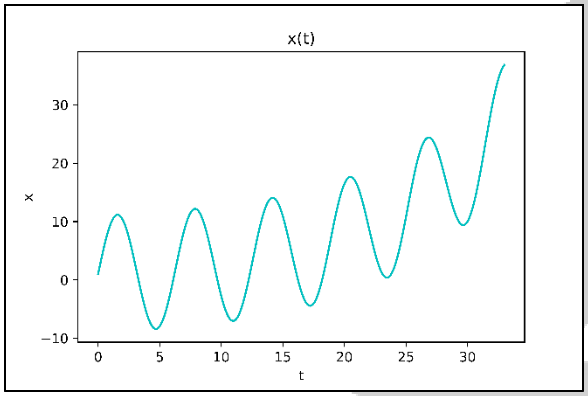
پس در نهایت:

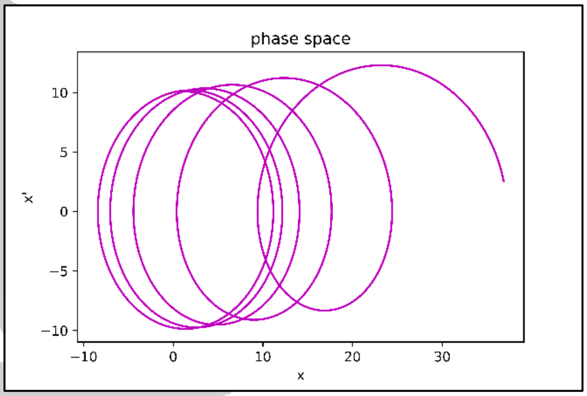
$$\boxed{x = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t) + \frac{a}{b^{۲} + \omega^{۲}}e^{bt}}$$

نمودارهای این حالت را در صفحه بعد کشیده‌ایم.

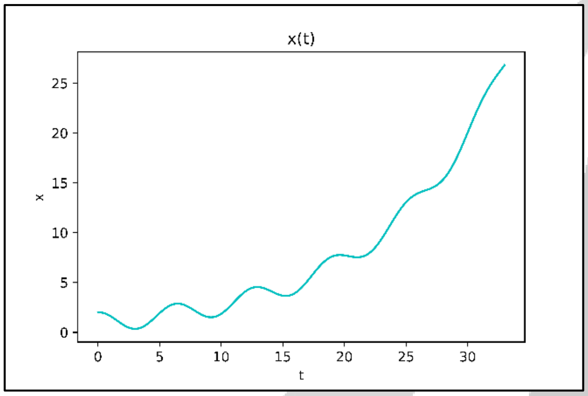
$\omega = ۱ , a = ۱ , b = ۰.۱$

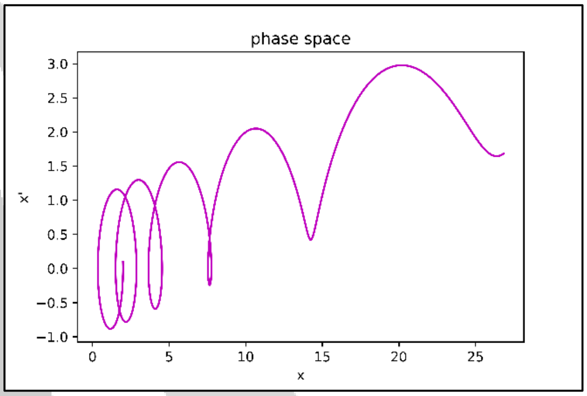
حالت ۱ به ازای $A = ۱۰ , B = ۰$





حالت ۲ به ازای $A = ۰ , B = ۱$





۳-تابع سینوسی :

این تابع از یک تابع کسینوسی $\dot{M}$ حاصل شده‌است.

$$f_{(t)} = k\sin(bt)$$

$$\ddot{x} + \omega^{۲}x = k\sin(bt)$$

از این پس حل را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت یک: $(\omega \neq \pm b)$

در این صورت جمله‌ای که به جواب حالت همگن یا همان جواب عمومی اضافه می‌کنیم، یک تابع سینوسی است، زیرا مشتق دوم سینوس به تابع مشابه خودش می‌رسد:

(جواب عمومی همان جواب حالت همگن شده معادله است و جواب خصوصی جوابی است که باید ناهمگنی را صفر کند.)

می‌توان تابع کسینوسی هم اضافه کرد فقط در جواب‌ها اختلاف فاز ایجاد می‌شود و اگر هر دو تابع را اضافه کنیم بعد از مشتق‌گیری و جایگذاری مشاهده می‌کنیم که ضریب کسینوس باید صفر باشد.

$$x = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t) + Csin(\gamma t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^{۲}\big(Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)\big) - C\gamma^{۲}sin(\gamma t)$$

$\ddot{x}$ را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$-\omega^{۲}\big(Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)\big) - C\gamma^{۲}sin(\gamma t) + \omega^{۲}\big(Asin(\omega t) + Bcos(\omega t) + Csin(\gamma t)\big) = k\sin(bt)$$

$$-C\gamma^{۲}sin(\gamma t) + \omega^{۲}Csin(\gamma t) = k\sin(bt)$$

$$Csin(\gamma t)(\omega^{۲} - \gamma^{۲}) = k\sin(bt)$$

که فورا از این تساوی نتیجه می‌شود که:

$$\gamma = b$$

$$C = \frac{k}{\omega^{۲} - \gamma^{۲}} = \frac{k}{\omega^{۲} - b^{۲}}$$

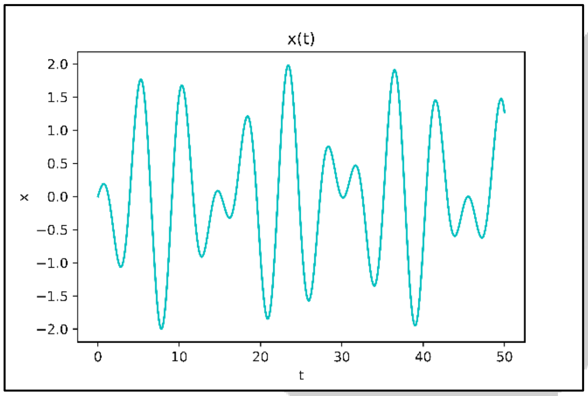
و در نهایت:

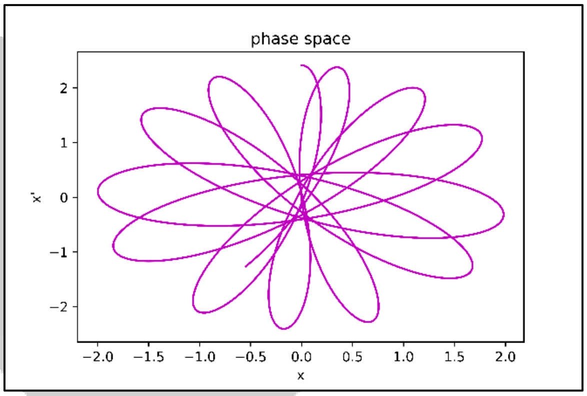
$$\boxed{x = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t) + \frac{k}{\omega^{۲} - b^{۲}}sin(bt)}$$

که می‌بینیم شرط وجود جواب $\omega \neq \pm b$ است.

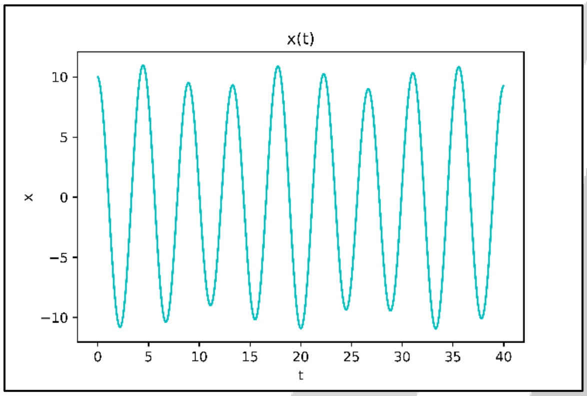
نمودارهای این تابع به ازای ($k = ۱ , b = ۱ , \omega^{۲} = ۲$) کشیده شده‌اند.

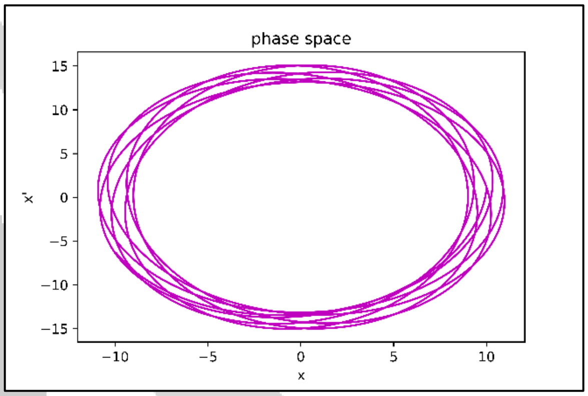
حالت ۱ به ازای $A = ۱ , B = ۰$





حالت ۲ به ازای $A = ۰ , B = ۱۰$





حالت دو: $(\boldsymbol{\omega = \pm b})$

در این بخش برای سادگی جواب خصوصی (x_p) و عمومی (x_c) معادله را جدا می‌کنیم.

$$x_c = Asin(\omega t) + Bcos(\omega t) \Rightarrow \ \ddot{x}_c + \omega^۲ x_c = ۰$$

$$\ddot{x}_p + \omega^۲ x_p = k\sin(bt) \quad , \omega^۲ = b^۲$$

$$\ddot{x}_p + b^۲ x_p = k\sin(bt)$$

جواب خصوصی این معادله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_p = t(\alpha\sin(bt) + \beta\cos(bt))$$

ضریب داخلی یا بسامد هردو تابع باید خود b باشد، زیرا قرار است تابعی با بسامد b را ساده کند و با مشتق گیری این ضریب داخلی یا بسامد تغییری نمی‌کند.

در نتیجه:

$$\dot{x}_p = t(\alpha b\cos(bt) - \beta b\sin(bt)) + \alpha\sin(bt) + \beta\cos(bt)$$

$$\ddot{x}_p = \alpha b\cos(bt) - \beta b\sin(bt) + t(-\alpha b^۲\sin(bt) - \beta b^۲\cos(bt)) + \alpha b\cos(bt) - \beta b\sin(bt)$$

$$\ddot{x}_p = ۲b(\alpha\cos(bt) - \beta\sin(bt)) - b^۲ t(\alpha\sin(bt) + \beta\cos(bt))$$

$$\ddot{x}_p = ۲b(\alpha\cos(bt) - \beta\sin(bt)) - b^۲ x_p$$

$$\ddot{x}_p + b^۲ x_p = ۲b(\alpha\cos(bt) - \beta\sin(bt)) = k\sin(bt)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\alpha = ۰$$

$$-۲b\beta = k \ \Rightarrow \ \beta = \frac{-k}{۲b}$$

و جواب معادله دیفرانسیل مجموع دو جواب عمومی و خصوصی است.

$$x = x_p + x_c$$

زیرا:

$$\ddot{x}_c + \omega^۲ x_c + \ddot{x}_p + b^۲ x_p = k\sin(bt) \ , \omega^۲ = b^۲$$

$$\frac{d^۲}{dt^۲}(x_p + x_c) + \omega^۲(x_p + x_c) = k\sin(bt)$$

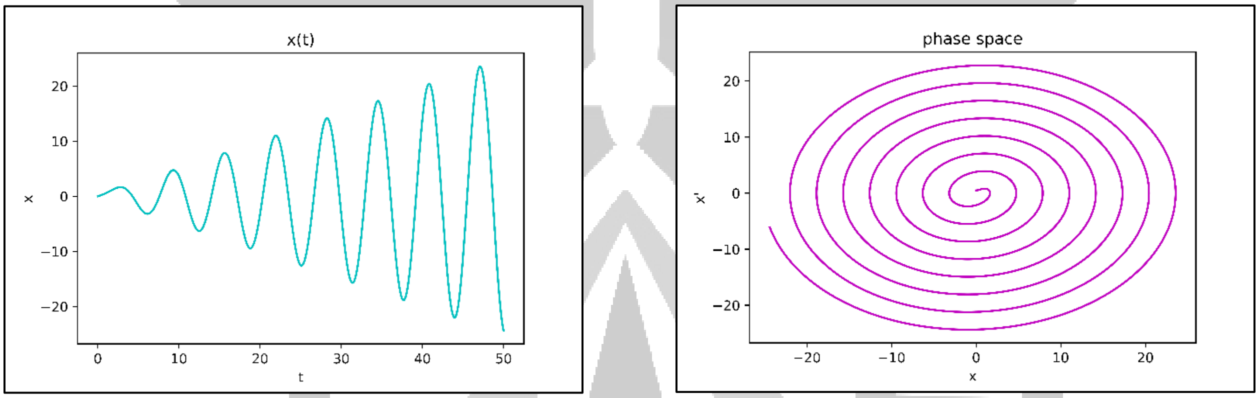
که این همان معادله‌ای است، که به دنبال جواب آن بودیم. حالا تابعی پیدا کردیم $(x_p + x_c)$ که در آن صدق کند.

پس در نهایت جواب به این صورت می‌شود:

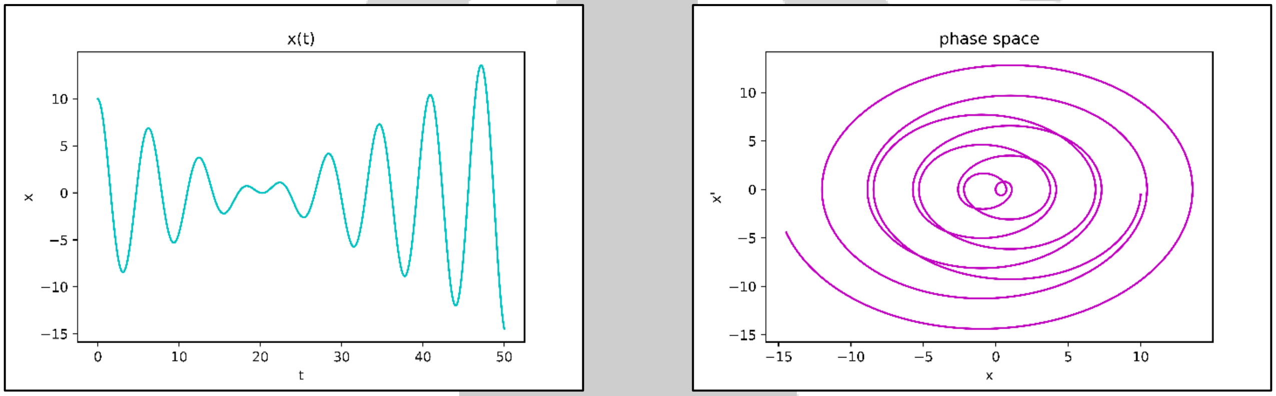
$$\boxed{x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) - \frac{kt}{2b}\cos(bt)}$$

نمودار های این تابع به ازای ($k = 1 , b = \omega = 1$) کشیده شده‌اند.

حالت ۱ به ازای $A = 1 , B = 0$



حالت ۲ به ازای $A = 0 , B = 10$



دیدیم که با مدل‌سازی و اعمال فرض‌هایی برروی پدیده‌های طبیعی و بهره‌گیری از ریاضیات، می‌توانیم نتایج جالبی از آن‌ها استخراج کنیم. البته اگر بخواهیم این بررسی‌ها را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم، بهتر است به سراغ روش‌های تحلیل‌داده‌ای برویم و با برازش داده‌ها، روابط تئوری را که در اختیار داریم اصلاح کنیم.