12th IOAA team

I.R.IRAN

اختر فیزیک

درنامه آمادگی مرحله اول

هدی پورغلامی

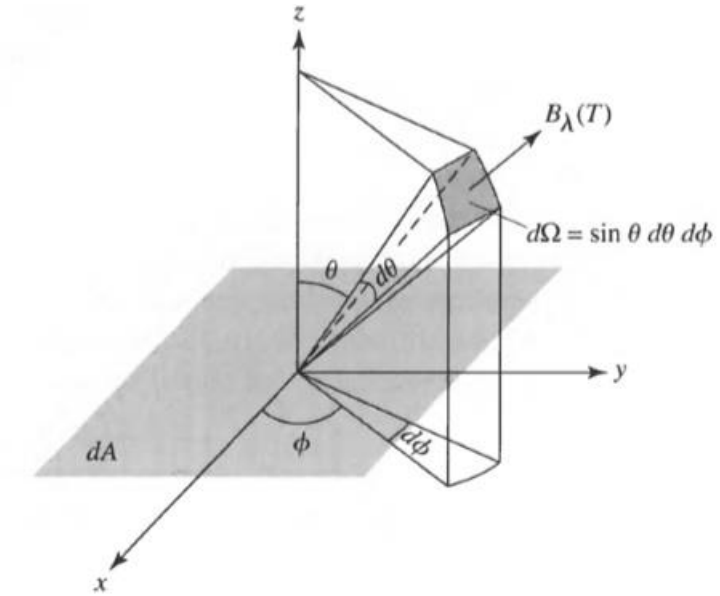
علی یونسی

مقدمات اختر فیزیک

زاویه فضایی

تعریف زاویه فضایی:

$$d\Omega = \frac{dA}{R^{۲}} = \sin\theta \, d\theta d\varphi$$



رابطه تیتوس-بُده

به کمک این رابطه می‌توان شعاع مداری سیارات منظومه شمسی را تعیین کرد:

$$r_{(Au)} = ۰.۴ + ۰.۳ \times ۲^{n}$$

$$n \in (-\infty , ۰ , ۱ , ... ,۷)$$

n شماره سیاره است که به طور مثال برای زمین مقدار آن ۱ می‌باشد.

× شماره ۳ مربوط به کمربند سیارکی است.

داده های نجومی

اطلاعات کهکشان راه شیری

شعاع دیسک	ضخامت	تعداد ستارگان	فاصله خورشید از مرکز کهکشان	دوره تناوب چرخش خورشید
kpc	kpc	-	kpc	$Myear$
۲۵	۱	$۱۰^{۱۰}$	۸	۲۰۰

اطلاعات خوشه کروی نوعی

شعاع	تعداد ستارگان	تعداد در کهکشان راه شیری	جرم میانگین ستاره‌ها
pc	-	-	$M_{\odot}$
۳	$۱۰^{۶}$	۱۵۰	۰,۵

اطلاعات خوشه باز نوعی

شعاع	تعداد ستارگان	تعداد در کهکشان راه شیری	جرم میانگین ستاره‌ها
pc	-	-	$M_{\odot}$
۱	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۶}$	۱

اطلاعات تحول ستاره ای

	کوتوله سفید	ستاره نوترونی	سیاهچاله
جرم در رشته اصلی	۰,۱ تا ۶ جرم خورشید	۱,۴ تا ۱۰ جرم خورشید	۳ تا ۴۰ جرم خورشید
جرم در مرحله مرگ	۰,۱ تا ۱,۴ جرم خورشید	۱,۴ تا ۳ جرم خورشید	۳ تا ۱۰ جرم خورشید
قطر	قطر زمین	$۳۲km$	$۱۰km$
چگالی متوسط	$۱۰^{۶}\frac{g}{cm^{۳}}$	$۱۰^{۱۴}\frac{g}{cm^{۳}}$	نا محدود

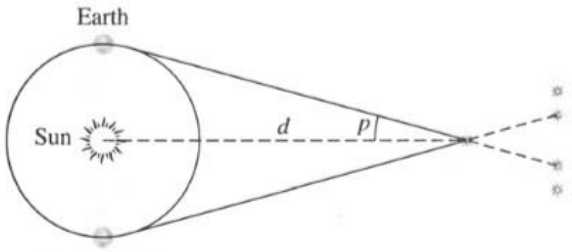
سایر اطلاعات

تعداد کهکشان های عالم	$۱۰^{۱۲}$
سن عالم	$۱۳.۷Gyr$
شعاع عالم	$۴Gpc$
عمر خورشید	$۱۰Gyr$
قدر مطلق RR شلیاقی ها	۰
قدر مطلق متغیر های قیفاووسی	-۷
قدر مطلق ابرنواختر نوع ۱	-۱۹
بهترین توان تفکیک تلسکوپ زمینی(کِک)	۰,۰۰۱ ثانیه قوسی
بهترین توان تفکیک تلسکوپ فضایی(گایا)	$۱۰^{-۵}$ ثانیه قوسی
نسبت چگالی مرکز خورشید به چگالی متوسط	۶
تعداد ستاره های قابل رویت با چشم غیر مسلح	۶۰۰۰

اختر فیزیک

اختلاف منظر

موقعیت ستاره ها در اثر حرکت زمین نسبت به زمینه آسمان تغییر می‌کند که اندازه زاویه ای این حرکت را زاویه اختلاف منظر می‌نامند و با توجه به آن فاصله ستاره را می‌توان تعیین نمود.



$$d = \frac{۱_{Au}}{\tan p} \approx \frac{۱_{Au}}{p}$$

× وقتی زاویه بدون توابع مثلثاتی (سینوس و کسینوس و...) ظاهر می‌شود مقدار آن بر حسب رادیان بیان می‌شود.

پارسک: فاصله ای که اختلاف منظر مثلثاتی آن برابر ۱ ثانیه قوس ($\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه) می‌باشد را ۱ پارسک می‌نامند.

$$۱_{pc} = \frac{۱_{Au}}{\frac{۱}{۳۶۰۰} \times \frac{\pi}{۱۸۰}} = ۲۰۶۲۶۵_{Au}$$

درخشندگی

مقدار انرژی تابش شده در واحد زمان (نرخ تابش انرژی) از یک ستاره را درخشندگی آن ستاره می‌گویند که معمولاً آن با L و با واحد ژول بر ثانیه نشان می‌دهند.

مثال: $L_{\odot} = ۳.۸۶ \times ۱۰^{۲۶}$

روشنایی

انرژی از سطح ستاره در همه جهات گسیل می‌شود و با دور شدن از ستاره مقدار انرژی در واحد سطح کم می‌شود. با توجه به این که تمام انرژی تابش شده در واحد زمان از سطح کره ای به شعاع r عبور می‌کند مقدار روشنایی یا شار دریافتی از یک ستاره در فاصله r از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$b = \frac{L}{S_{\text{کره}}} = \frac{L}{۴\pi r^{۲}}$$

مثال: روشنایی خورشید $b_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{۴\pi r^{۲}} \approx ۱۳۷۰ \frac{w}{m^{۲}}$

قدر ظاهری

با توجه به حساسیت لگاریتمی چشم انسان به روشنایی ، معیاری لگاریتمی برای روشنایی به نام قدر تعریف می‌شود که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$m = -۲.۵ \log b + c$$

× از علامت منفی معادله متوجه می‌شویم که هرچه ستاره روشن تر باشد قدر ظاهری آن کمتر است.

برای بدست آوردن ثابت c از قدر ظاهری و روشنایی خورشید استفاده می‌کنیم:

$$m - m_{\odot} = -۲.۵ \log \frac{b}{b_{\odot}}$$

$$m_{\odot} = -۲۶.۷$$

قدر مطلق

قدر ظاهری یک ستاره وابسته به فاصله آن ستاره است و مقایسه قدر ظاهری ملاک خوبی برای مقایسه درخشندگی آن ها نیست اما اگر دو ستاره در یک فاصله یکسان قرار داشته باشند آنگاه مقایسه قدر ظاهری آن ها در واقع مقایسه درخشندگی آن دو ستاره است. حال برای تعریف چنین کمیتی ستاره ها را در فاصله ۱۰ پارسکی از خود تصور می‌کنیم و قدر ظاهری بدست آمده از ستاره در این فاصله را قدر مطلق آن تعریف می‌کنیم:

$$M = -۲.۵ \log b_{(۱۰.\square\square)} + c$$

برای بدست آوردن ثابت c از قدر مطلق و روشنایی خورشید استفاده می‌کنیم:

$$M - M_{\odot} = -۲.۵ \log \frac{L}{L_{\odot}}$$

$$M_{\odot} = ۴.۷۲$$

پیمانه فاصله

همچنین می‌توانیم قدر مطلق و قدر ظاهری یک ستاره را مقایسه کنیم و به رابطه ای به نام پیمانه فاصله برسیم:

$$m - M = -۲.۵ \log \frac{\frac{L}{۴\pi d^{۲}}}{\frac{L}{۴\pi \left(۱۰_{pc}\right)^{۲}}} = ۵ \log d_{pc} - ۵$$

قدر حدی

قدر کم نور ترین ستاره‌ای را که می‌توان مشاهده کرد را قدر حدی می‌گویند. معمولاً قدر حدی چشم انسان را در یک آسمان معمولی برابر ۶ در نظر می‌گیرند.

جسم سیاه

ستاره ها و تا حدودی سیاره ها را می‌توان جسم سیاه در نظر گرفت. برای جسم سیاه دو رابطه مهم وجود دارد که در ادامه آورده شده است:

۱- درخشندگی در واحد سطح یک جسم سیاه:

$$F = \sigma T^{۴}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$L = A\sigma T^{۴} = ۴\,\pi R^{۲}\sigma T^{۴}$$

۲- طول موجی که در آن بیشترین تابش را دارد:

$$\lambda_{max}T = ۰.۰۰۲۹_{m.K}$$

قدر سطحی

قدر در واحد زاویه فضایی را قدر سطحی یک جسم می‌گویند که واحد آن را به صورت $\frac{mag}{\text{arcsec}^{۲}}$ است و نشان دهنده قدر معادل ۱ ثانیه قوسی مربع جسم است.

ابتدا روشنایی در واحد زاویه فضایی را بدست می‌آوریم:

$$I = \frac{b}{\Omega} = \frac{\frac{L}{۴\,\pi d^{۲}}}{\frac{A}{d^{۲}}} = \frac{L}{۴\,\pi A} = \frac{۴\,\pi R^{۲}\sigma T^{۴}}{۴\,\pi \times \pi R^{۲}} = \frac{\sigma T^{۴}}{\pi}$$

× باید توجه داشته باشیم که واحد I اکنون $\frac{w}{m^{۲}.str}$ ولی برای بدست آوردن قدر سطحی در یک ثانیه قوسی مربع باید استرادیان را به ثانیه قوسی مربع تبدیل کرد:

$$I = \frac{b}{\Omega_{(\text{arcsec}^{۲})}} = \frac{\frac{L}{۴\,\pi d^{۲}}}{\frac{A}{d^{۲}} \times (۲۰۶۲۶۵)^{۲}} = \frac{L}{۴\,\pi A \times (۲۰۶۲۶۵)^{۲}} = \frac{\sigma T^{۴}}{\pi \times (۲۰۶۲۶۵)^{۲}}$$

قدر سطحی نیز مانند قدر ظاهری و مطلق تعریف می‌شود:

$$\mu = -۲.۵ \log I + c$$

قدر سطحی را نیز مانند سایر قدر ها می‌توان مقایسه کرد:

$$\mu_۲ - \mu_۱ = -۲.۵ \log \frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\mu_۲ - m_۱ = -۲.۵ \log \frac{I_۲}{b_۱}$$

از مقایسه قدر ظاهری و سطحی یک ستاره به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\mu - m = ۲.۵ \log \Omega$$

مثال: قدر سطحی خوشه ای با قدر ظاهری ۸ و زاویه $۱۰۰_{arcmin^۲}$ چقدر است؟ (جزوه قدر سطحی تیم دهم)

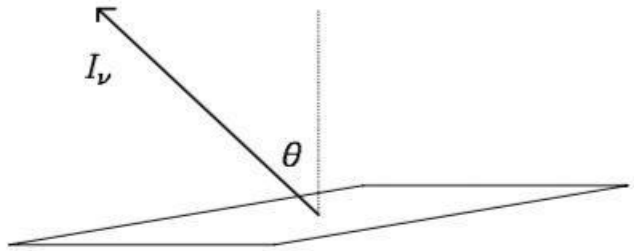
$$\left.\begin{array}{l} \mu - m = ۲.۵ \log \Omega \\ \Omega = ۱۰۰_{arcmin^۲} = ۳۶۰۰۰۰_{arcsec^۲} \end{array}\right\} \longrightarrow \mu = ۲۱.۹ \frac{mag}{\mathrm{arcsec}^۲}$$

فشار تابشی

فوتون ها همانند ماده دارای تکانه هستند لذا برخورد آن ها با یک سطح و تغییر تکانه آن ها موجب ایجاد فشاری می‌شود که به آن فشار تابشی می‌گویند و از رابطه زیر بدست می‌آید.

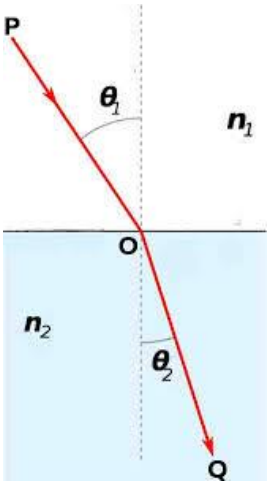
$$P = \frac{b}{c}(۱ + \alpha) \cos^۲ \theta$$

که در آن α ضریب بازتاب سطح می‌باشد و θ مطابق شکل سنجیده می‌شود.



نورشناسی

هنگامی که نور از محیطی به محیط دیگر می‌رود مسیر آن تغییر می‌کند که این مسئله در رابطه اسنل-دکارت نشان داده می‌شود:



$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲$$

n ضریب شکست محیط است و در خلاء مقدار آن برابر ۱ است.

مثال: پرتویی با زاویه سرسویی $z = ۵۰^\circ$ وارد جو می‌شود اگر جو را به صورت لایه های تخت موازی در نظر بگیریم و ضریب شکست در سطح زمین برابر ۱٫۰۱ باشد زاویه سرسویی این پرتو هنگامی که به سطح زمین می‌رسد چقدر است؟

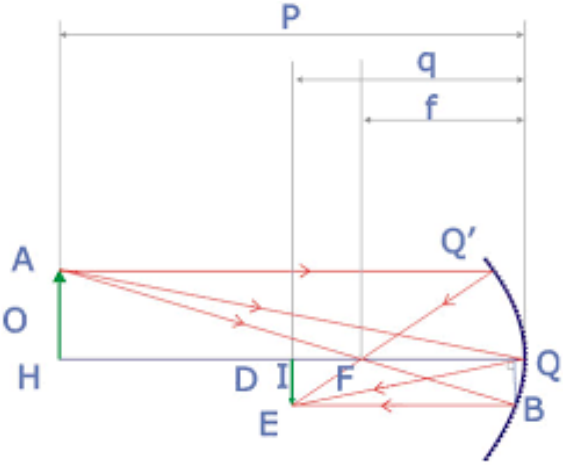
برای هر لایه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} n_۰ \sin z = n_۱ \sin\theta_۱ \\ n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \\ \quad\cdots \\ n_i \sin\theta_i = n_{i+۱} \sin\theta_{i+۱} \end{array}\right\} \longrightarrow n_۰ \sin z = n_{\text{سطح}} \sin z' \longrightarrow z' = ۴۹.۳۳^\circ$$

آینه ها و عدسی ها

دو رابطه برای عدسی ها و آینه ها وجود دارد

$$\frac{۱}{f} = \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q}$$



f فاصله کانون آینه یا عدسی و p فاصله جسم از آینه و q فاصله تصویر از آینه می‌باشد.

با توجه به رابطه متوجه می‌شویم که اگر جسم در بی‌نهایت فیزیکی قرار داشته باشد تصویر آن در صفحه کانونی تشکیل می‌شود.

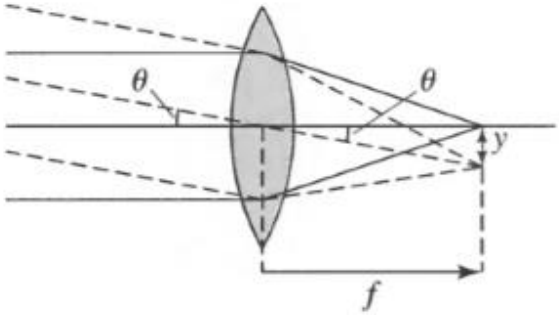
رابطه دیگر موسوم به رابطه عدسی سازان می‌باشد که کاربرد کمتری نسبت به رابطه اول دارد.

$$\frac{۱}{f} = (n - ۱)\left(\frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲}\right)$$

× برای عدسی های واگرا علامت R منفی است.

مقیاس صفحه

اگر پرتو هایی مطابق شکل از جسمی که در بی‌نهایت و با زاویه θ نسبت به محور عدسی قرار دارد به عدسی برسد آنگاه این پرتو ها در صفحه کانونی با فاصله y از محور جمع می‌شوند.

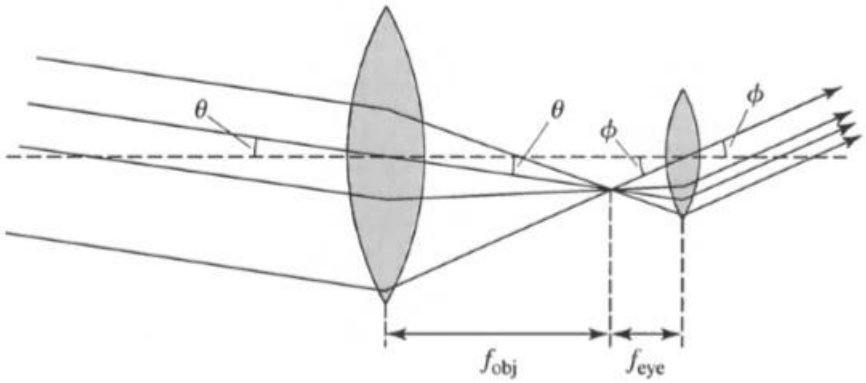


$$\tan\theta = \frac{y}{f} \approx \theta \rightarrow \frac{۱}{f} = \frac{\theta}{y}$$

کمیت $\frac{\theta}{y}$ را مقیاس صفحه می‌نامند.

بزرگنمایی

معمولاً ساز و کار یک تلسکوپ را به صورت خلاصه با دو عدسی پشت سر هم نشان می‌دهند. برای بدست آوردن مقدار بزرگنمایی یک تلسکوپ از همین مدل استفاده می‌کنیم. مقدار بزرگنمایی را به طور معمول با m نشان می‌دهند.



$$m = \frac{\phi}{\theta} \approx \frac{\tan\phi}{\tan\theta} = \frac{f_{obj}}{f_{eye}} = \frac{FOV_{eye}}{FOV_{obj}}$$

شدت در تلسکوپ

تلسکوپ تمام نوری که از یک ستاره به دهانه اش می‌رسد را جمع کرده و در صفحه کانونی‌اش تصویر ستاره را تشکیل می‌دهد. بنابراین روشنایی‌ای که از زاویه فضایی ستاره در صفحه کانونی می‌بینیم متفاوت با روشنایی ستاره خارج از تلسکوپ است.

$$I'\mathrm{A}_f = bA_{Tel} \rightarrow\ I' = b\frac{A_{Tel}}{A_f} \rightarrow\ I' = b\frac{\pi D^{۲}}{\pi y^{۲}} \rightarrow\ I' = b\frac{D^{۲}}{f^{۲}\theta^{۲}} \rightarrow\ \frac{I'}{I} = \frac{b'}{b} = \frac{D^{۲}}{f^{۲}}$$

نسبت کانونی

همانطور که می‌بینید روشنایی در تلسکوپ وابسته به کمیت $F = \frac{f}{D}$ است که این کمیت را نسبت کانونی می‌گویند.

قدر در تلسکوپ

به دلیل تغییر روشنایی در تلسکوپ ، قدر یک ستاره نیز مقدار متفاوتی با خارج تلسکوپ دارد. از مقایسه قدر خارج از تلسکوپ با قدر پشت تلسکوپ به رابطه زیر می‌رسیم.

$$m_{Tel} - m = -۲.۵\log\frac{b'}{b} = ۵\log F$$

همچنین می‌توان چشم را مانند یک تلسکوپ در نظر گرفت و قدر یک ستاره را پشت تلسکوپ را با قدری که چشم می‌بیند مقایسه کرد اما به طور معمول از تاثیر نسبت فاصله کانونی ها صرف نظر می‌کنند و بنابراین به رابطه زیر می‌رسیم.

$$m_{Tel} - m_{eye} = -۲.۵ \log \frac{\left(\frac{b'}{b}\right)_{Tel}}{\left(\frac{b'}{b}\right)_{eye}} = -۵ \log \frac{D_{Tel}}{D_{eye}}$$

× قدر مردمک چشم انسان را ۸ میلی‌متر در نظر می‌گیرند.

قدر حدی تسلکوپ

زمانی که قدر ستاره پشت تلسکوپ برابر قدر حدی چشم یعنی ۶ باشد، آنگاه قدر حدی تلسکوپ را برابر مقدار قدر آن ستاره در خارج از تلسکوپ می‌گوییم. که یعنی در رابطه قبل مقدار m_{Tel} را برابر ۶ می‌گذاریم و m_{eye} را بدست می‌آوریم($m_{\text{حدی تلسکوپ}}$ در رابطه زیر معادل m_{eye} در رابطه قبل است).

$$m_{\text{حدی تلسکوپ}} - m_{\text{حدی چشم}} = ۵ \log \frac{D_{Tel}}{D_{eye}}$$

مثال: قدر حدی آسمان هنگامی که با یک تلسکوپ ۸ اینچ مشغول رصد کردن هستیم چقدر است؟

$$m_{\text{حدی تلسکوپ}} - m_{\text{حدی چشم}} = ۵ \log \frac{D_{Tel}}{D_{eye}} \rightarrow m_{\text{حدی تلسکوپ}} = ۶ + ۵ \log \frac{۸ \times ۲.۵ \times ۱۰}{۸} \approx ۱۳$$

حد تفکیک

دو ستاره که از حدی به هم نزدیک تر باشند توسط تلسکوپ قابل تفکیک نیستند. این حد تفکیک می‌تواند ناشی از پراش نور در دهانه تلسکوپ و یا محدودیتی که پیکسل های یک CCD ایجاد می‌کند باشد.

حد تفکیک ناشی از پراش (α) از رابطه زیر بدست می‌آید:

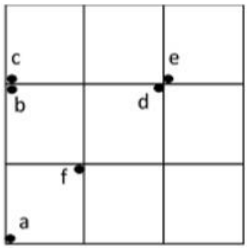
$$\sin \alpha \approx \alpha = ۱.۲۲ \frac{\lambda}{D}$$

D قطر دهانه تلسکوپ و λ طول موجی که در آن رصد می‌کنیم می‌باشد و طول موج نور مرئی ۵۵۰ نانومتر است.

برای تفکیک دو ستاره در CCD تصویر دو ستاره باید حداقل ۲ پیکسل فاصله داشته باشند حال در بیشترین حالت این فاصله به صورت قطری است (نقاط a و e در تصویر) که نتیجه می‌دهد:

$$\theta = \frac{۲\sqrt{۲}\, x}{f}$$

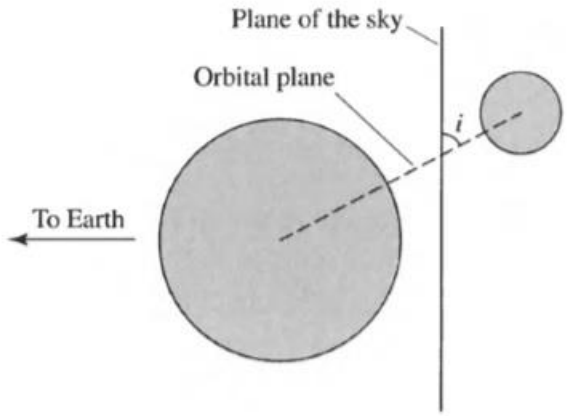
x اندازه یک پیکسل CCD است.



تصویر برگرفته از جزوه تلسکوپ و ابزارهای رصدی نهمین تیم

دوتایی ها

تعداد بسیار زیادی از ستارگان آسمان ستاره های دوتایی هستند یعنی یک سیستم شامل دو ستاره را تشکیل می‌دهند که به لحاظ گرانشی به یکدیگر مقید هستند. مسیر حرکت این ستاره ها یک صفحه را در آسمان تعیین می‌کند که زاویه این صفحه با صفحه آسمان را زاویه تمایل مداری (i) می‌گویند که مطابق شکل سنجیده می‌شود.



معروف ترین و پرکاربرد ترین رابطه برای دوتایی ها رابطه بین جرم ، دوره تناوب ، سرعت شعاعی و زاویه تمایل مداری یک دوتایی است که در ادامه آورده شده است.

$$\frac{(m_۲)^۳}{(m_۱ + m_۲)^۲} = \frac{T}{۲\,\pi G}\frac{v_۱\, r_{max}}{\sin^۳ i}$$

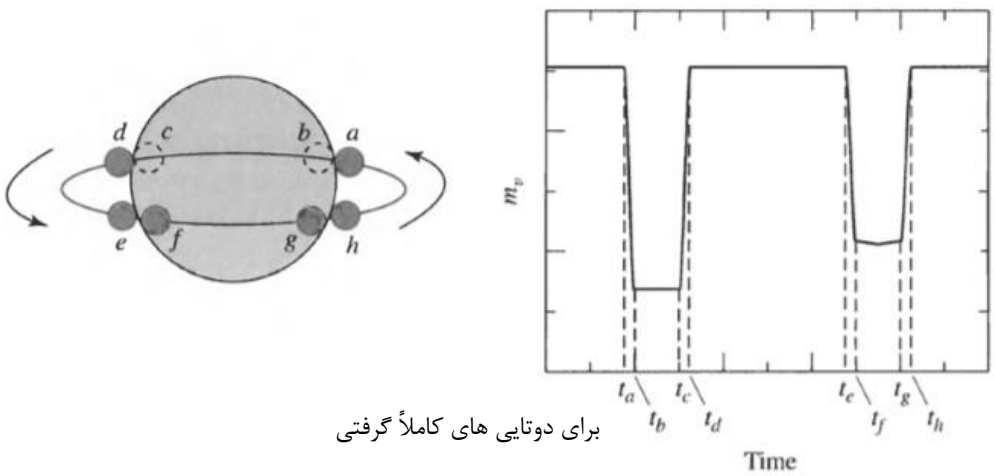
i: زاویه تمایل مداری سیستم

T: دوره تناوب سیستم

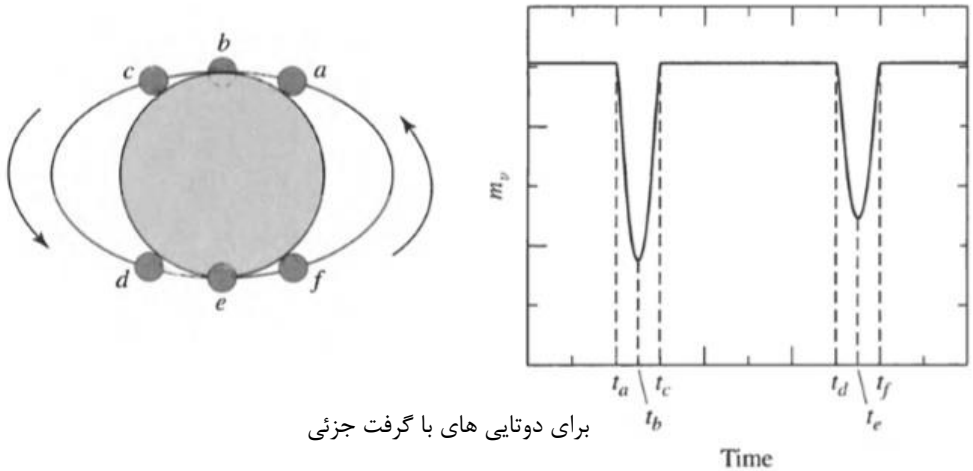
$v_۱\, r_{max}$: ماکسیمم سرعت شعاعی رصد شده از مولفه اول

در صورتی که ستاره های دوتایی زاویه تمایل مداری‌شان در حدی باشد که یک عضو کاملاً توسط عضو دیگر پوشیده شود می‌گوییم دوتایی گرفت کامل دارد و در غیر این صورت دوتایی با گرفت جزئی می‌باشد.

از منحنی نور رصد شده از دوتایی ها اطلاعاتی می‌توان بدست آورد. نمونه ای از این منحنی هم برای دوتایی هایی با گرفت کامل و هم برای دوتایی هایی با گرفت جزئی و روابطی که از آن ها بدست می‌آید در ادامه آورده شده است.



برای دوتایی های کاملاً گرفتی



برای دوتایی های با گرفت جزئی

$$r_s = \frac{v}{۲}(t_b - t_a)$$

$$r_l = \frac{v}{۲}(t_c - t_a) = r_s + \frac{v}{۲}(t_c - t_b)$$

$$\frac{T_h}{T_c} = \left(\frac{l_۰ - l_۱}{l_۰ - l_۲}\right)^{\frac{۱}{۴}}$$

r_s و r_l شعاع مولفه کوچک و بزرگ

T_h: دمای مولفه داغ تر

T_c: دمای مولفه سرد تر

$l_۰$: مقدار بیشینه روشنایی در نمودار

$l_۱$: مقدار کمینه روشنایی در نمودار

$l_۲$: مقدار روشنایی مربوط به گرفت با عمق کمتر

سرعت گاز ها

میانگین سرعت ذرات را بر حسب دما و میانگین جرم ذرات ، معمولاً از رابطه زیر بدست می‌آورند که این رابطه خود از تابع توزیع سرعت ماکسول-بولتزمن بدست می‌آید:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{۳\ kT}{m}}$$

محتمل ترین سرعت ذرات گاز:

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{۲\ kT}{m}}$$

مثال: اگر خودروهایی که در یک بزرگراه در حال حرکت هستند را ذرات گاز کامل فرض کنیم، دمای این بزرگراه چند کیلوکلوین خواهد شد؟ (اولین مرحله یک آزمایشی دوازدهمین تیم)

الف) $۱۰^{۲۸}$

ب) $۱۰^{۲۵}$

ج) $۱۰^{۱۱}$

د) $۱۰^{۱۸}$

حل: گزینه ب

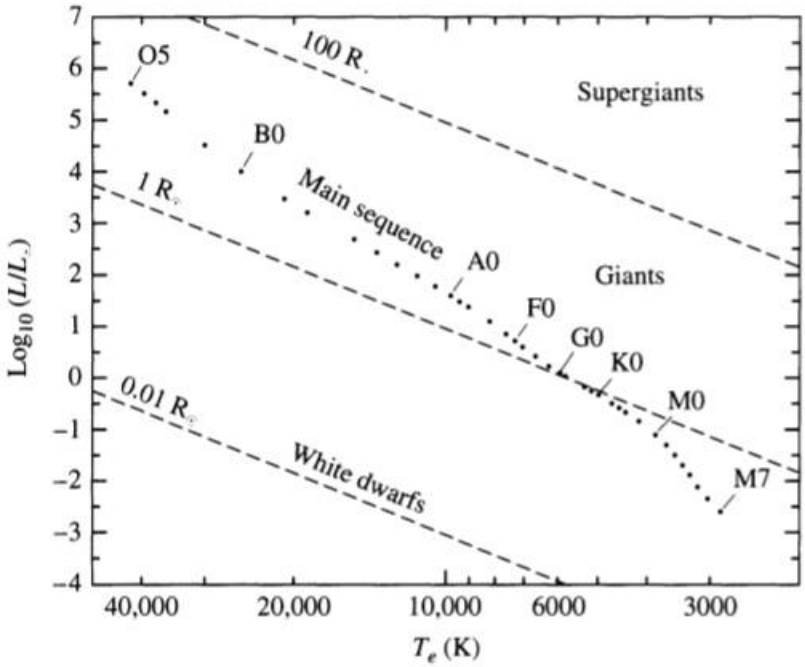
از رابطه انرژی گاز کامل داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۳}{۲}kT \quad \begin{cases} m = ۱۰۰۰\ kg \\ v = ۵۰\ km\ h^{-۱} \end{cases}$$

$$T = ۱۰^{۲۸}\ k = ۱۰^{۲۵}$$ کیلو کلوین

رشته اصلی

ستارگان در طول عمر خود بر روی رشته اصلی قرار می‌گیرند و پس از مرگ نیز در قسمت های مختلفی از نمودار درخشندگی (در مقیاس لگاریتمی) بر حسب دما قرار می‌گیرند که نام این قسمت ها و همچنین نام گذاری رده طیفی ستاره و دمای مربوط به آن را در تصویر زیر مشاهده می‌کنید:



تابش

چگالی انرژی فوتون‌های جسم سیاهی با دمای T از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$u = aT^{۴}\ (\frac{J}{m^{۳}})$$

که ثابت a ثابت بولتزمن نامیده می‌شود و مقدار آن برحسب ثابت تابش (σ) به این صورت است:

$$a = \frac{۴\,\sigma}{c} = ۷.۵۶ \times ۱۰^{-۱۶}\ \frac{J}{m^{۳}K^{۴}}$$

و چگالی تعداد فوتون‌ها برابر:

$$n = b\,T^{۳}$$

$$b = ۲ \times ۱۰^{۷}\ \frac{۱}{m^{۳}K^{۳}}$$

یا به عبارتی برای فوتون‌های جسم‌سیاه $\frac{u}{n} = ۲.۷۰\ kT$ است که یعنی انرژی متوسط فوتون‌ها برابر $۲.۷۰\ kT$ است.

فشار ناشی از فوتون‌های جسم‌سیاه برابر $\frac{۱}{۳}$ چگالی انرژی آن است.

$$P = \frac{۱}{۳} aT^{۴}$$

مثال:

الف) فشار ناشی از فوتون‌های CMB با دمای $T = ۲.۷۳\ K$ چند پاسکال است؟

ب) اگر شعاع کیهان را $۱۰\ Gpc$ در نظر بگیریم، چه تعداد فوتون و چه مقدار انرژی در کیهان وجود دارد؟

حل:

الف) $$P = \frac{۱}{۳} aT^{۴} = ۱.۴ \times ۱۰^{-۱۴}\ Pa$$

ب) $$N = nV = bT^{۳} \frac{۴\pi}{۳} R^{۳} = ۵.۱ \times ۱۰^{۸۸}\ photons$$

$$E = uV = aT^{۴} \frac{۴\pi}{۳} R^{۳} = ۵.۲ \times ۱۰^{۶۶} J$$

طول پویش آزاد

فوتونی که در گازی با چگالی تعداد n و سطح مقطع برخورد ذرات σ حرکت می‌کند به طور متوسط بین هر برخورد با ذرات مسافتی را می‌پیماید که به آن طول‌پویش‌آزاد میانگین گفته می‌شود و مقدار آن در رابطه زیر نشان داده شده است:

$$l = \frac{۱}{n\sigma}$$

و مدت زمان بین هر برخورد:

$$t = \frac{l}{c}$$

و برای آنکه فوتون طول D را بپیماید، N قدم (طول‌پویش‌آزاد) لازم است که:

$$N = (\frac{R}{l})^{۲}$$

مثال:

الف) طول‌پویش‌آزاد میانگین در خورشید را بدست آورید.

ب) مدت زمانی که طول میکشد تا یک فوتون از مرکز خورشید فرار کند را محاسبه کنید.

ج) با فرض آن واکنش‌های هسته‌ای و تولید انرژی در خورشید متوقف شوند، محاسبه کنید با فرض اینکه درخشندگی خورشید ثابت باقی بماند چه مقدار انرژی در خورشید ذخیره شده است.

حل:

الف) فرض می‌کنیم خورشید کاملا از هیدروژن تشکیل شده است و طول‌پویش‌آزاد میانگین آن را بدست می‌آوریم.

$$n = \frac{\rho_{\odot}}{m_H} = ۸.۴ \times ۱۰^{۲۹} m^{-۳}$$

و سطح مقطع برخورد سطح مقطع تامسون می‌گیریم که مقدار آن برابر:

$$\sigma = ۶.۶۵ \times ۱۰^{-۲۹}\ m^{۲}$$

$$\rightarrow l = \frac{۱}{n\sigma} \approx ۰.۰۲\ m$$

ب) یک فوتون برای طی مسافت شعاع خورشید باید N برخورد انجام دهد که زمان هر برخورد $\frac{l}{c}$ است، پس زمان فرار:

$$\tau = Nt = (\frac{R}{l})^{۲} \times \frac{l}{c} = \frac{R^{۲}}{lc} \approx ۳۰۰۰ \text{ سال}$$

ج) مدت زمانی که طول میکشد تا آخرین پرتوهای‌تولید شده از خورشید خارج شوند برابر مقدار بدست آمده در قسمت ب است و در این مدت خورشید با درخشندگی ثابت تابش میکند پس انرژی ذخیره شده درآن برابر است با :

$$E = L_{\odot}\tau = ۳.۶ \times ۱۰^{۳۷}\ J$$

جذب نور

اگر پرتوی نوری در خلا منتشر شود و از مواد مختلف عبور کند، شدت آن به علت جذب نور در ماده کم می‌شود.

مقدار تغییر شدت نور، با شدت اولیه، چگالی ماده و طولی که نور در آن ماده می‌پیماید متناسب است که ضریب تناسب کدریت ماده نامیده می‌شود و مقدار آن به طول موج نور تابش شده بستگی دارد؛ پس داریم:

$$dI = -I\,\kappa\rho\,ds$$

که علامت منفی به علت کاهش شدت است.

× بسته به نوع تعریف کدریت ممکن است در بعضی مواقع $\kappa\rho$ کدریت نامیده شود که با استفاده از بُعد آن کمیت میتوانیم متوجه نوع تعریف شویم.

پس از انتگرال‌گیری داریم:

$$I = I_{\cdot}\,e^{-\int_{\cdot}^{s}\kappa\rho ds}$$

که $I_{\cdot}$ شدت اولیه هنگام ورود به ماده و s مسافت طی شده در ماده می‌باشد.

با فرض ثابت بودن چگالی و کدریت در طول مسیر:

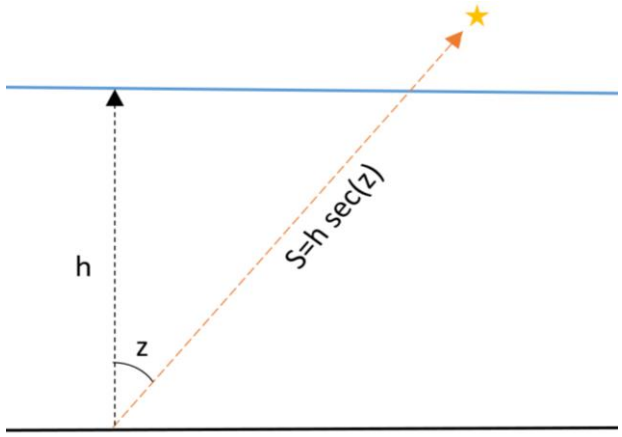
$$I = I_{\cdot}\,e^{-\kappa\rho s}$$

اگر از s روی شدت میانگین بگیریم، طول‌پویش‌آزاد میانگین برابر $\frac{۱}{\kappa\rho}$ بدست می‌آید. پس داریم:

$$l = \frac{۱}{\kappa\rho} = \frac{۱}{n\sigma}$$

تغییرات قدر در جو

برای ستاره ای با فاصله سرسویی z و با فرض اینکه جو متشکل از لایه‌های موازی تخت با ارتفاع h است، مقدار تغییرات قدر را بدست می‌آوریم.



$$\frac{I}{I_{.}} = e^{-\kappa\rho S} = e^{-\kappa\rho h \sec(z)}$$

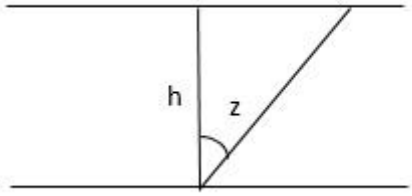
که اگر $m_{.}$ قدر ستاره خارج از جو و m قدر آن در پایین جو باشد داریم:

$$m - m_{.} = -۲.۵\, log\left(\frac{I}{I_{.}}\right) = -۲.۵ \log\left(e^{-\kappa\rho h \sec(z)}\right) = ۲.۵\, \kappa\rho h \sec(z) \log(e)$$

مثال:

شهابی را با قدرظاهری ۱,۲ در فاصله سرسویی °۳۵ مشاهده می‌کنیم. اگر میزان کدری جو $۸ \times ۱۰^{-۷}\, m^{-۱}$ باشد، توان تابشی شهاب چقدر بوده است؟ (اولین مرحله یک آزمایشی دوازدهمین تیم)

حل: ابتدا با توجه به فرمول کدری اختلاف قدر درون و بیرون جو شهاب سنگ را به دست می آوریم . سپس با توجه به فرمول شار می توان فاصله شهاب سنگ از ما را تعیین نمود .



$$\frac{I}{I_{۰}} = e^{-\frac{kh}{\cos z}} \rightarrow \Delta m = ۲.۵\frac{kh}{\cos z}\log e = ۰.۱۰۶ \rightarrow m_{۰} = ۱.۰۹۵ \rightarrow$$

$$m_{۰} = m_{\odot} - ۲.۵\log\frac{f_{۰}}{f_{\odot}} \rightarrow$$

$$f_{۰} = ۱.۰۴ \times ۱۰^{-۸} \rightarrow f_{۰} = \frac{L}{۴\square d^{۲}} \rightarrow$$

$$d = \frac{h}{\cos z} = \frac{۱۰۰}{\cos z} \rightarrow$$

$$L = ۱۹۶۱ \approx ۲۰۰۰(W)$$

معادلات ساختار

برای در تعادل ماندن ستاره باید شیب تغییرات فشار برحسب فاصله از مرکز در رابطه ی زیر صدق کند:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-Gm_{(r)}\rho_{(r)}}{r^{۲}} = -g_{(r)}\rho_{(r)}$$

فشار گاز کاملی با چگالی ρ و جرم متوسط ذرات $\overline{m}$ در دمای T برابر $P_g = \frac{\rho kT}{\overline{m}}$ می‌باشد.

از تحلیل ابعادی به این نتیجه می‌رسیم که فشار مرکز ستاره ای با جرم M و شعاع R برابر P_c در رابطه زیر است

$$P_c = \alpha\frac{GM^{۲}}{R^{۴}}$$

× مقدار α به تابع چگالی ستاره بستگی دارد.

پتانسیل خودگرانشی

مقدار کار لازم برای تشکیل سیستم ذرات (مثل ستاره ، خوشه ، کهکشان و...)

$$U = -\beta\frac{GM^{۲}}{R}$$

× ضریب β نیز به تابع چگالی وابسته است و مقدار آن برای کره همگن برابر $\frac{۳}{۵}$ میباشد.

مقیاس زمانی های ستاره

مقیاس زمانی دینامیکی: مدت زمانی که طول میکشد تا ذرات ستاره از آن فرار کنند.

$$\tau_{dyn} = \frac{R}{v_{esc}} \approx \frac{R}{\sqrt{۲\,\frac{GM}{R}}} = \frac{R^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{۲\,GM}}$$

مقیاس زمانی گرمایی: مدت زمانی که طول می‌کشد تا ستاره انرژی پتانسیل خود را به صورت تابش ازدست بدهد.

$$\tau_{th} = \frac{U}{L} \approx \frac{GM^{۲}/R}{L}$$

مقیاس زمانی هسته ای: مدت زمانی که طول می‌کشد تا ستاره کل سوخت هسته ای خود را تبدیل به انرژی و تابش کند.

$$\tau_{nuc} = \frac{\varepsilon M c^{۲}}{L}$$

که برای خورشید:

$$\tau_{dyn} \approx ۱۰۰۰\ s$$

$$\tau_{th} \approx ۱۰^{۱۵}\ s$$

$$\tau_{nuc} \approx ۱۰^{۱۷}\ s$$

که با توجه به عمر خورشید، مقیاس زمانی هسته ای مقیاس مناسب تری برای تخمین عمر ستارگان است.

قضیه ویریال

طبق این قضیه اگر سیستمی مکانیکی و در تعادل داشته باشیم جمع میانگین زمانی پتانسیل و دو برابر میانگین زمانی انرژی جنبشی آن برابر صفر می‌شود.

$$۲\langle K\rangle + \langle U\rangle = ۰$$

پس انرژی این سیستم:

$$E = U + K = -K = \frac{U}{۲}$$

در نتیجه انرژی کره ای با چگالی ثابت برابر $E = \frac{-۳}{۱۰}\frac{GM^{۲}}{R}$ است.

درخشندگی ادینگتون

بیشترین درخشندگی ای که ستاره می‌تواند داشته باشد تا براثر فشار فوتون ها ناپایداریش از بین نرود:

$$L_{ed} = \frac{۴\ \pi Gc}{\bar{\kappa}} M$$

واکنش های هسته‌ای

برای تولید انرژی در ستارگان واکنش‌هایی در هسته‌ی ستاره اتفاق می‌افتند که عناصر سبک‌تر به عناصر سنگین‌تر تبدیل می‌شوند. در طی این فرایندها مقداری انرژی آزاد می‌شود که حاصل از تبدیل شدن جرم به انرژی است.

واکنش پروتون-پروتون: معروف‌ترین واکنش هسته‌ای در ستارگان تبدیل چهار پروتون (یا هسته‌ی هیدوژن) به یک هسته‌ی هلیوم است.

مثال: برای تولید انرژی لازم برای درخشندگی خورشید، درهرثانیه چند واکنش پروتون-پروتون باید انجام شود؟

حل: انرژی تولید شده در هرواکنش را محاسبه میکنیم:

$$m_H = ۱.۰۰۷۹۴\ amu$$

$$m_{He} = ۴.۰۰۲۶۰\ amu$$

پس مقدار جرمی که در این واکنش تبدیل به انرژی می‌شود: $\Delta m = ۴m_H - m_{He} = ۰.۰۲۹۱۶\ amu$

انرژی هرواکنش: $E = \Delta m\ c^۲ = ۴.۳۵ \times ۱۰^{-۱۲} J = ۲۷.۲\ MeV$

پس برای تولید درخشندگی خورشید باید N واکنش در هر ثانیه انجام شود که

$$N = \frac{L}{E} = ۸.۸ \times ۱۰^{۳۷}\ \frac{\text{واکنش}}{s}$$

مثال: ستاره‌ای به جرم ۲۰ جرم خورشید داریم که ۲۰٪ آن از هلیوم تشکیل شده است. درخشندگی ستاره ۱۰۰ برابر درخشندگی خورشید است که ۳۰٪ آن ناشی از سوختن هلیوم میباشد. دوره‌ی هلیوم سوزی ستاره را حساب کنید. هلیوم طبق این واکنش به کربن تبدیل می‌شود: $۳\ {}^{۴}_{۲}He \rightarrow {}^{۱۲}_{۶}C\ +\ \gamma$

حل: مدت زمان هلیوم سوزی برابر است با کل انرژی‌ای که هلیوم موجود در ستاره می‌تواند تولید کند تقسیم بر درخشندگی ناشی از سوختن هلیوم. پس انرژی کل ناشی از سوختن هلیوم را محاسبه می‌کنیم.

درکل ستاره میتواند n واکنش انجام دهد که برای هرواکنش ۳ هلیوم لازم است:

$$n = \frac{M_{He\ star}}{۳\ m_{He}} = \frac{۲۰\%\ M_{star}}{۳\ m_{He}} = ۴ \times ۱۰^{۵۶}$$

انرژی هرواکنش برابر است با :

$$E_{\text{واکنش}} = (۳\ m_{He} - m_C)c^۲ = ۱.۱۷ \times ۱۰^{-۱۲} J$$

پس انرژی کلی که میتواند تولید شود:

$$E = nE_{\text{واکنش}} = ۴.۷ \times ۱۰^{۴۴} J$$

و دوره هیدروژن سوزی:

$$\tau = \frac{E}{L} = ۱.۳\ Gyr$$

به طور کلی نسبت جرمی که در واکنش تبدیل به انرژی میشود به جرم مواد اولیه واکنش را ضریب کارایی آن واکنش می‌نامند که برای واکنش $p - p$ این ضریب $\underline{\varepsilon = ۰.۰۰۷}$ می‌باشد.

پس با ضرب کردن ضریب کارایی واکنش در جرمی که قرار است به انرژی تبدیل شود، جرم نهایی تبدیل شونده به انرژی بدست می‌آید.

مثال: جرم هسته ی خورشید ۰,۱ جرم کل آن می‌باشد. با فرض ثابت بودن درخشندگی خورشید و غالب بودن واکنش p-p ، عمر آن را بدست آورید.

حل: M_c جرم هسته ی خورشید است که قرار است به انرژی تبدیل شود. پس:

$$E_{\text{کل}} = \beta M_c c^۲$$

و از طرفی $E_{\text{کل}} = L_\odot \tau_\odot$

پس از مساوی قرار دادن دو عبارت:

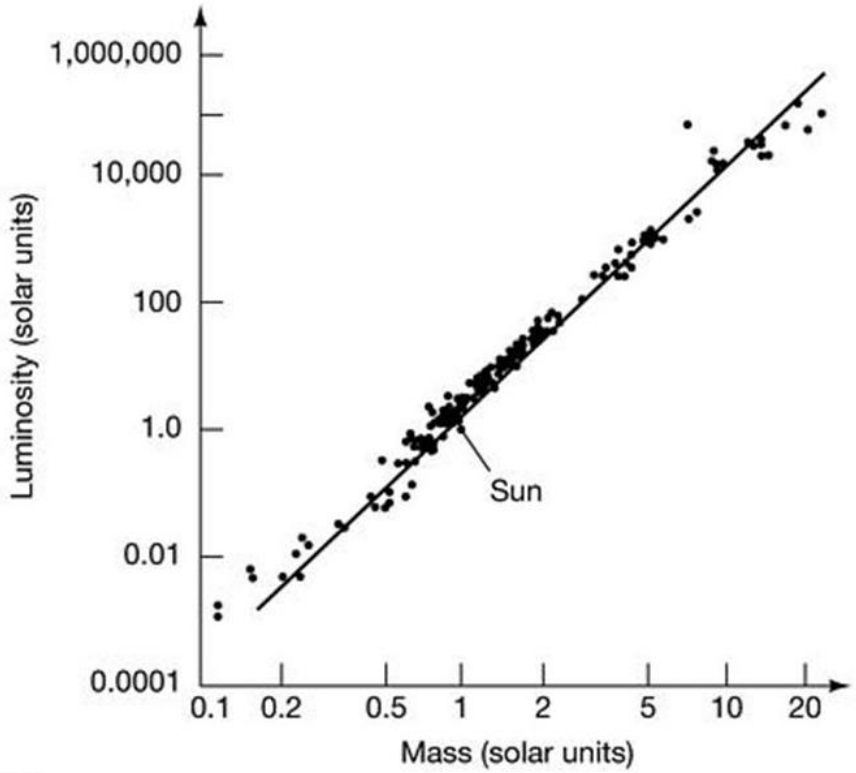
$$\tau_\odot = \frac{\beta M_c c^۲}{L_\odot} = ۱۰^{۱۰}\ yr$$

رابطه ی جرم-درخشندگی ستارگان

با استفاده از روابط ساختار ستاره ای به رابطه ای بین درخشندگی و جرم ستارگان می‌رسیم که به این صورت است:

$$\frac{L}{L_\odot} = (\frac{M}{M_\odot})^\alpha$$

$$۳ < \alpha < ۳.۵$$



رابطه ی عمر و جرم ستارگان:

$$\frac{\tau}{\tau_\odot} = (\frac{M}{M_\odot})^{-۲.۵}$$

پس عمر ستارگان با افزایش جرم آن ها کاهش می یابد.

مثال:

الف) عمر ستاره ای با درخشندگی ۲ برابر خورشید چقدر است؟

ب) اگر شعاع آن ۰,۲۵ خورشید باشد، فشار مرکز آن چند برابر فشار خورشید است؟

حل:

الف)

$$\frac{L}{L_\odot} = (\frac{M}{M_\odot})^{۳} \rightarrow \frac{M}{M_\odot} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$$

پس عمر آن:

$$\frac{\tau}{\tau_\odot} = ۰.۵۶ \rightarrow \tau = ۵.۶\ Gyr$$

ب)

$$\frac{P_c}{P_{c.\odot}} = \frac{(\frac{M}{M_\odot})^{۲}}{(\frac{R}{R_\odot})^{۴}} \approx ۴۰۰$$