هجدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه پاسخنامه آزمون مرحله ۲ سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

بعد از ظهر دوشنبه ۱۹ اردیبهشت ماه ۱۴۰۱ – ساعت ۱۴:۰۰ تا ۱۸:۰۰

ثوابت فیزیکی و نجومی

	کمیت		مقدار
G	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m}^{٣}\ \mathrm{s}^{-٢}\ \mathrm{kg}^{-١}$	$٦٫٦٧ \times ١٠^{-١١}$
c	سرعت نور	$\mathrm{m\ s}^{-١}$	$٣٫٠٠ \times ١٠^{٨}$
σ	ثابت استفان-بولتزمان	$\mathrm{W\ m}^{-٢}\ \mathrm{K}^{-٤}$	$٥٫٦٧ \times ١٠^{-٨}$
k	ثابت بولتزمان	$JK^{-١}$	$١٫٣٨ \times ١٠^{-٢٣}$
	عدد آووگادرو	$mol^{-١}$	$٦٫٠٢ \times ١٠^{٢٣}$
ly	سال نوری	m	$٩٫٤٦ \times ١٠^{١٥}$
pc	پارسک	m	$٣٫٠٩ \times ١٠^{١٦}$
AU	واحد نجومی	m	$١٫٥٠ \times ١٠^{١١}$
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	$١٫٩٩ \times ١٠^{٣٠}$
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	$٦٫٩٦ \times ١٠^{٨}$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	$٣٫٨٥ \times ١٠^{٢٦}$
$M_\odot$	قدر مطلق خورشید		$+٤٫٧٤$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید		$-٢٦٫٨$
$T_\odot$	دمای مؤثر سطح خورشید	K	٥٧٨٠
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	$٥٫٩٧ \times ١٠^{٢٤}$
$R_\oplus$	شعاع زمین	km	٦٣٨٠
	دوره تناوب حرکت تقدیمی زمین	yr	٢٥٧٧٢
ϵ	تمایل محور زمین		٢٣.٥°

سؤال اول : (۱۳۰ نمره)

اختر شناسان با رصد دقیق، یک منظومه فراخورشیدی یافته اند که در آن سیاره‌ای به جرم m به دور ستاره‌ای به جرم M می‌گردد، بردار های مکان و سرعت سیاره در یک لحظه از زمان به صورت زیر اندازه گیری شده است:

$$\vec{\mathbf{r}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})$$
$$\vec{\mathbf{v}} = \sqrt{۳}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

این دو بردار در دستگاه مختصاتی کارتزینی نوشته شده اند که مبداء آن روی مرکز ستاره و محور های x و y آن در صفحه مداری سیاره و محور z عمود بر صفحه مداری در جهت راستگرد قرار دارد. $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ بردار های یکه در دستگاه مختصات کارتزین هستند.

الف) تعیین کنید شکل مدار کدامیک از مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، سهمی و یا هذلولی) است؟ (۳۰ نمره)

ب) مختصات کارتزین (x, y, z) نقطه حضیض مدار را تعیین کنید (۱۰۰ نمره)

توجه: فرض کنید جرم ستاره مرکزی به گونه ایست که $GM = ۱$ باشد. از جرم سیاره در مقابل ستاره صرف نظر کنید. در این مسئله باید مشروح محاسبات داده شود. صرفا نام بردن از یک مقطع مخروطی کافی نیست و در صورت درست بودن جواب، فقط نمره جواب نهایی را خواهد گرفت.

پاسخ سوال اول:

الف) یک راه ساده برای تعیین شکل مدار این است که انرژی مدار را حساب کنیم مقدار انرژی کل مدار همواره ثابت است و بر مبنای آن می توان شکل مدار را تعیین کرد

$$E = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{GMm}{r}$$

از داده های مسئله واضح است که

$$r^{۲} = \frac{۱}{۸}(۱+۱) = \frac{۱}{٤} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$$

$$v^{۲} = ۳ + ۱ = ٤ \Rightarrow v = ۲$$

با جایگذاری در معادله انرژی ودر نظر گرفتن اینکه $GM = ۱$ به دست می آوریم

$$E = ۲m - ۲m = ۰$$

کل انرژی مدار همواره صفر است پس مدار **سهمی** خواهد بود

ب) برای تعیین نقطه حضیض ابتدا باید بردار لنز را مشخص کنیم. این بردار در راستای حضیض است برای این کار ابتدا باید بردار اندازه حرکت زاویه‌ای ویژه (برواحد جرم) را حساب کنیم

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (\sqrt{۳}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(-\sqrt{۳}\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{۳}\hat{\mathbf{k}})$$

بردار لنز بنا به تعریف برابر است با

$$\vec{\mathbf{A}} = -(\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{v}}) - \frac{G(M+m)}{r}\vec{\mathbf{r}} = G(M+m)\vec{\mathbf{e}}$$

جاییکه بردار $\vec{\mathbf{e}}$ برداری است در جهت نقطه حضیض با اندازه خروج از مرکز مدار با توجه به فرضیات این مسئله داریم

$$-(\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{v}}) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(٤\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{۳}\hat{\mathbf{j}} + ۳\hat{\mathbf{k}})$$

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(٤\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{۳}\hat{\mathbf{j}} + ۳\hat{\mathbf{k}}) - \frac{۲}{۲\sqrt{۲}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(۲\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{۳}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = \vec{\mathbf{e}}$$

واضح است که طول بردار $\vec{\mathbf{e}}$ برابر واحد است که سهمی بودن مدار را دوباره تایید می کند. با این حساب بردار $\vec{\mathbf{e}}$ برداری یکه است در جهت حضیض. برای پیدا کردن مختصات کارتزین حضیض کافی است این بردار را در فاصله حضیض ضرب کنیم تا مختصات حضیض به دست آید. در مدار سهمی شکل می دانیم که فاصله حضیض برابر است با

$$r_p = \frac{L^۲}{۲G(M+m)} = \frac{L^۲}{۲} = \frac{۷}{۱۶}$$

در نهایت داریم

$$\vec{\mathbf{r}}_p = \frac{۷}{۳۲\sqrt{۲}}\left(۲\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{۳}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right)$$

مولفه های این بردار مختصات حضیض را نشان می دهد.

توجه: در این مسئله به اشتباه گفته شده که صفحه xy چارجوب کارتزین در صفحه مدار است که با مقدار بردار مکان سیاره سازگار نیست. هر چند این اشتباه در راه حل مسئله اثری ندارد با وجود این اگر دانش آموز با در نظر گرفتن این فرض و رعایت قوائد فیزیک و ریاضی به پاسخ نهایی یعنی مختصات کارتزین حضیض برسد نمره کامل خواهد گرفت.

سؤال دوم : (۸۰ نمره)

حد قدری یک تلسکوپ عبارت است از قدر ظاهری کم نورترین ستاره‌ای که به کمک آن تلسکوپ قابل رصد است.

الف) حد قدری تلسکوپی m_l است. کم جرمترین ستاره‌ای که در یک خوشه ستاره ای به فاصله r (r بر حسب پارسک) به کمک این تلسکوپ قابل رصد است، چند برابر جرم خورشید جرم دارد؟ (راهنمایی: سعی کنید روابط را بر حسب $Log(\frac{M}{M_\odot})$ بنویسید.) (۳۵ نمره)

ب) اگر میزان خاموشی محیط میان ستاره‌ای به صورت αr سبب افزایش قدر ستاره شود (α ضریب خاموشی، بر حسب قدر بر کیلو پارسک است)؛ کم جرم ترین ستاره قابل مشاهده توسط این تلسکوپ چند برابر جرم خورشید خواهد بود؟ (۲۰ نمره)

ج) یک خوشه ستاره ای در فاصله $r = ۲۰۰۰$ پارسکی از ما قرار گرفته است. اگر ضریب خاموشی $\alpha = ۰.۷۵$ قدر بر کیلوپارسک باشد، نسبت جرم قسمت ب به جرم قسمت الف چند است؟ (نمره ۲۵)

همه ستاره های خوشه، ستاره های رشته اصلی هستند و برای آنها رابطه $L \propto M^۳$ برقرار است که در آن M جرم و L درخشندگی ستاره است.

پاسخ سوال دوم:

الف)

$$M_l - M_\odot = -۲٫۵\ Log\frac{F}{F_\theta} = -۲٫۵ log\left(\frac{\frac{L}{٤\pi r^{۲}}}{\frac{L_\odot}{٤\pi(۱۰)^{۲}}}\right)$$

$$= ۲٫۵ Log\left[\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{۳}\left(\frac{۱۰}{r}\right)^{۲}\right]$$

$$Log\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = \frac{۲}{۳}\ Log\left(\frac{r}{۱۰}\right) - \frac{m_l - M_\odot}{۲٫۵\times ۳}$$

که در آن فاصله بر حسب پارسک است.

ب) تنها جمله‌ی مربوط به خاموشی میان‌ستاره‌ای افزوده می‌شود و رابطه به صورت زیر در خواهد آمد که در آن فاصله بر حسب پارسک است.

$$Log\left(\frac{M}{M_\odot}\right) = \frac{۲}{۳}\ Log\left(\frac{r}{۱۰}\right) - \frac{m_l - M_\odot - \frac{\alpha r}{۱۰۰۰}}{۲٫۵\times ۳}$$

ج)

$$Log\frac{M_{\text{ب}}}{M_{\text{الف}}} = Log\left(\frac{M_{\text{ب}}}{M_\odot}\frac{M_\odot}{M_{\text{الف}}}\right) = Log\left(\frac{M_{\text{ب}}}{M_\odot}\right) - Log\left(\frac{M_{\text{الف}}}{M_\odot}\right)$$

$$= \left[\frac{۲}{۳}\mathrm{Log}\frac{\mathrm{r}}{۱۰} - \frac{\mathrm{m_l} - \mathrm{M}_\odot - \frac{\alpha\mathrm{r}}{۱۰۰۰}}{۲٫۵\times ۳}\right] - \left[\frac{۲}{۳}Log\frac{r}{۱۰} - \frac{m_l - M_\odot}{۲٫۵\times ۳}\right] = \frac{\alpha\left(\frac{r}{۱۰۰۰}\right)}{۲٫۵\times ۳}$$

$$= \frac{۰٫۷۵\times ۲}{۲٫۵\times ۳} = ۰٫۲$$

$$\frac{M_{\text{ب}}}{M_{\text{الف}}} = ۱۰^{۰٫۲} = ۱٫۵۸$$

سؤال سوم : (۱۲۰ نمره)

سازمان فضایی می‌خواهد ماهواره‌ای را طی مانوری خاص به خارج از منظومه خورشیدی بفرستد. این مانور به این گونه است که ماهواره در هر مرحله در مدار بیضوی‌ای قرار دارد و لحظه‌ای که در اوج مداری قرار دارد سرعتی به اندازه u در جهت عمود به حرکت به آن اضافه می‌شود.

فرض کنید مدار ابتدایی یک مدار دایروی با شعاعی بسیار نزدیک به شعاع زمین است و در این حالت سرعت u عمود بر مسیر حرکت اضافه می‌شود.

الف) خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مدار مرحله دوم را بر حسب u به دست بیاورید. (۲۵ نمره)

ب) فرض کنید ماهواره در مرحله i ام در مداری با خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ e_i و a_i باشد، خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ ماهواره را در مرحله بعدی برحسب a_i و e_i و u و ثوابت فیزیکی بدست بیاورید. (۴۰ نمره)

ج) خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مرحله i ام را فقط برحسب i و u و ثوابت فیزیکی بدست بیاورید. (۳۵ نمره)

د) بعد از چند مرحله این ماهواره به مرحله فرار می‌رسد؟ (۲۰ نمره)

پاسخ سوال سوم :

الف)

$$E_0 = \frac{-GMm}{2R_e} \;\rightarrow\; E_1 = \frac{-GMm}{2R_e} + \frac{1}{2}mu^2$$

$$E_1 = \frac{-GMm}{2a} \rightarrow a = \frac{1}{\frac{1}{R_e} - \frac{u^2}{GM}}$$

$$h = \sqrt{GMR_e = \sqrt{GMa(1 - e^2)}} \rightarrow 1 - e^2 = \frac{R_e}{a} = 1 - \frac{R_e u^2}{GM}$$

$$\rightarrow e = u\sqrt{\frac{R_e}{GM}}$$

ب)

$$E_i = \frac{-GMm}{2a_i} \quad , E_{i+1} = \frac{-GMm}{2a_i} + \frac{1}{2}mu^2$$

$$a_{i+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_i} - \frac{u^2}{GM}}$$

$$h_i = h_{i+1} \rightarrow a_i(1 - e_i)^2 = a_{i+1}(1 - e_{i+1}^2)$$

$$1 - e_{i+1}^2 = (1 - e_i^2)\left(1 - \frac{a_i u^2}{GM}\right) = 1 - e_i^2 - \frac{a_i u^2}{GM} + \frac{a_i u^2 e_i^2}{GM}$$

$$\rightarrow e_{i+1} = \sqrt{e_i^2 - \frac{a_i u^2}{GM}(1 - e_i^2)}$$

ج)

$$E_i = E_{۰} + i\frac{۱}{۲}mu^{۲} \rightarrow \ a_i = \frac{۱}{\frac{۱}{R_e} - \frac{iu^{۲}}{GM}}$$

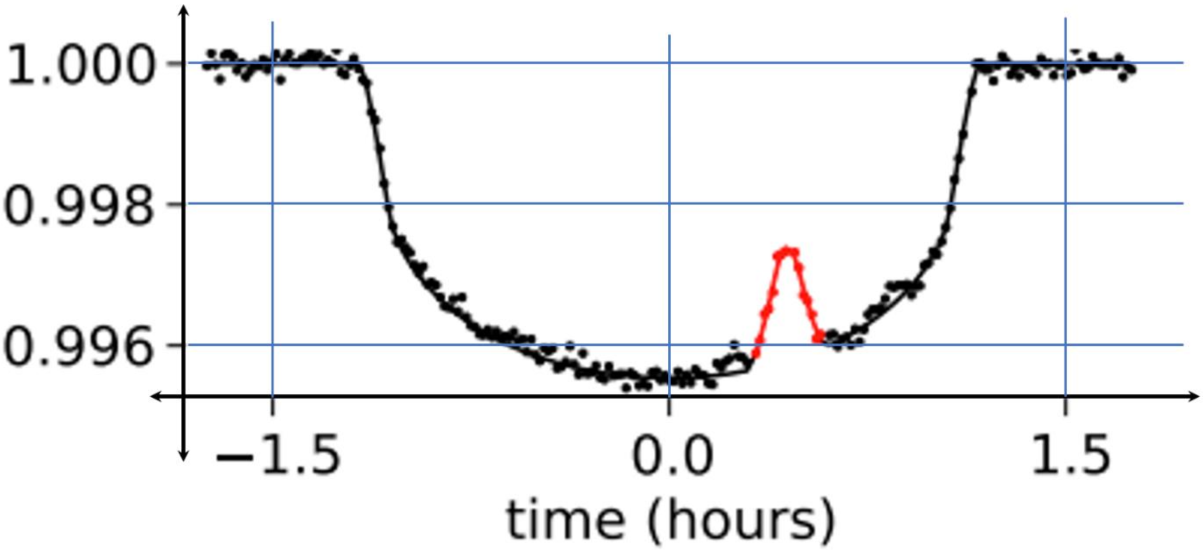
$$h_{۰} = h_i \rightarrow R_e = a_i(۱ - e_i)^{۲} \ \rightarrow \ e_i = u\sqrt{\frac{iR_e}{GM}}$$

د)

$$e_i > ۱ \rightarrow i > \frac{GM}{u^{۲}R_e} \rightarrow i = \left|\frac{GM}{u^{۲}R_e}\right| + ۱$$

سؤال چهارم: (۱۳۰ نمره)

منظومه‌ای فراخورشیدی را در نظر بگیرید که ستاره‌ای خورشیدگون دارد و سیارهٔ آن در مدار دایروی با تمایل مداری ۸۷° گرد ستاره‌اش می‌گردد. منحنی نوری زیر را از یکی از گرفت‌های سیاره ثبت کرده‌ایم که اثرات یک لکه‌ی ستاره‌ای نیز در آن مشهود است. لکه‌های ستاره‌ای نواحی نسبتاً سرد روی سطح ستاره-ها هستند که معمولاً ابعاد بزرگتری از سیارات دارند و دمای آنها در حدود ۱۰۰۰ درجه از دمای سطح ستاره کمتر است و نسبت به سطح ستاره تاریکتر دیده می شوند. در بعضی از ستاره ها ممکن است ابعاد لکه آنچنان بزرگ باشد که اثر آن در درخشانی ستاره قابل اندازه گیری شود.



الف) دمای سطحی لکه‌ی ستاره‌ای چند کلوین است؟ (۲۵ نمره)

ب) شعاع سیاره چند برابر شعاع زمین است؟(۱۵ نمره)

ج) شعاع مدار گردش سیاره به دور ستاره را پیدا کنید. (۲۵ نمره)

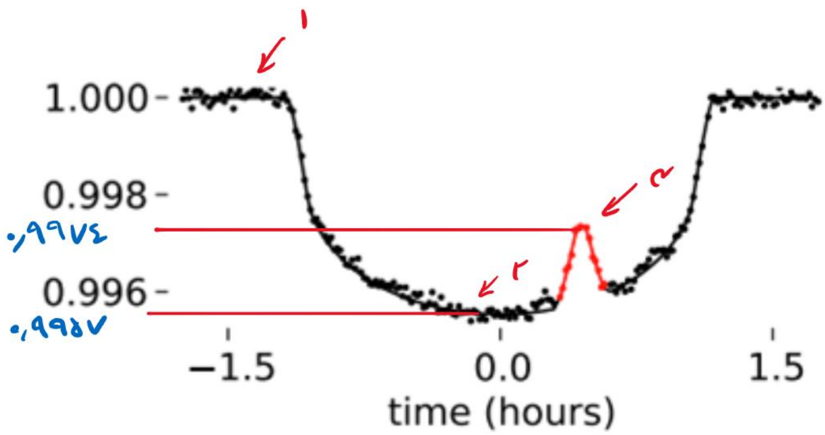
د) سرعت مداری سیاره چقدر است؟(۲۰ نمره)

ه) ابعاد لکه را بر حسب شعاع زمین تخمین بزنید. (۱۵ نمره)

و) اگر لکه با سرعت $۳۵۰\ ms^{-۱}$ خلاف جهت حرکت سیاره حرکت کند، منحنی نوری در گرفت بعدی چه تغییری می‌کند؟ آن را رسم کنید. فرض کنید دمای لکه ثابت باقی بماند، همچنین لکه روی خط گرفت حرکت کند. (۳۰ نمره)

پاسخ سوال چهارم :

الف و ب) سیاره‌ای داریم که جلوی ستاره را گرفته است؛ در سه حالت مشخص شده روی منحنی نوری، میزان درخشندگی را می‌توان به صورت زیر نوشت.



۱. وقتی گرفتی رخ نداده باشد:

$$I_۱ = S_\odot \sigma T_\odot^۴$$

۲. وقتی سیاره کاملاً روی ستاره باشد:

$$I_۲ = I_۱ - S_p \sigma T_\odot^۴$$

۳. وقتی سیاره روی لکه است:

$$I_۳ = I_۱ - S_p \sigma T_{\text{لکه}}^۴$$

با تقسیم کردن $I_۱$ به دو رابطه‌ی $I_۲$ و $I_۳$ خواهیم داشت:

$$\frac{I_۲}{I_۱} = ۱ - \frac{S_p}{S_\odot}$$

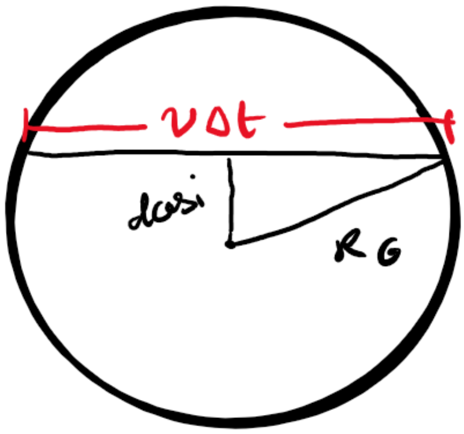
$$\frac{I_۳}{I_۱} = ۱ - \frac{S_p}{S_\odot}\left(\frac{T_{\text{لکه}}}{T_\odot}\right)^۴$$

با توجه به عددهای خوانده شده از نمودار می‌توانیم هر دو مجهول S_p و $T_{\text{لکه}}$ را به دست آوریم.

$$R_p = \sqrt{\frac{S_p}{S_\odot}}\, R_\odot = ۰٫۰۶۵۶ R_\odot = ۴٫۵۹ \times ۱۰^۷ m = ۷٫۱۷ R_\oplus$$

$$T_{\text{لکه}} = ۰٫۸۸۲ T_\odot = ۵۱۰۰ K$$

ج) اگر خط گرفت را روی ستاره رسم کنیم شکل زیر به دست می‌آید.



با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث خواهیم داشت:

$$d^{۲}\cos^{۲} i + \left(\frac{v\Delta t}{۲}\right)^{۲} = R_{\odot}^{۲}$$

و $\Delta t \approx ۲/۳\ hr$ همچنین از مدار دایروی داریم:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{d}}$$

با جایگذاری و حل معادله درجه سوم (به صورت عددی یا هر طور دیگر) سه جواب به دست می‌آید که دو جواب زیر مثبت و قابل قبول هستند. برای کسب نمره‌ی کامل لازم است به همه‌ی جواب‌ها اشاره شود هر چند به دست آوردن یکی از جواب‌های قابل قبول (مثبت) منجر به کسب کسر زیادی از نمره خواهد شد.

$$d = ۵/۷ \times ۱۰^{۹} m \qquad\qquad d = ۹/۵ \times ۱۰^{۹} m$$

د) تنها با جایگذاری فاصله در رابطه‌ی سرعت مدار دایروی $v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{d}}$ داریم:

$$v = ۱۵۰ \frac{km}{s} \qquad\qquad v = ۱۲۰ \frac{km}{s}$$

هـ) با ضرب δt در سرعت مداری و یا نسبت تناسب بستن با $۲\sqrt{R_{\odot}^{۲} - \left(\frac{v\Delta t}{۲}\right)^{۲}}$ می‌توان ابعاد لکه را تخمین زد.

$$\delta t = ١٤\ min$$

$$l \approx ٢٠\ R_{\oplus} \qquad\qquad l \approx ١٦\ R_{\oplus}$$

و) جهت حرکت سیاره راست به چپ است؛ همچنین طی یک دوره تناوب که زمان ۱۴۰ ساعت می‌باشد، لکه تقریباً به اندازه‌ی $\frac{R_{\odot}}{٤}$ به چپ منتقل شده است و تبعاً برامدگی با همین ابعاد به همین اندازه به چپ منتقل می‌شود.

جهت حرکت سیاره راست به چپ است؛ همچنین طی یک دوره تناوب که زمان ۶۶ ساعت می‌باشد، لکه تقریباً به اندازه‌ی $\frac{R_{\odot}}{۱۰}$ به چپ منتقل شده است و تبعاً برامدگی با همین ابعاد به همین اندازه به چپ منتقل می‌شود.

سؤال پنجم: (۱۲۰ نمره)

سرعت نور یکی از ثوابت اساسی در عالم است. ثابت بودن سرعت نور به ما این امکان را می‌دهد که میزان مسافتی که نور در فضا می‌پیماید را برحسب زمان بیان کنیم. در یک عالم منبسط شونده با ضریب مقیاس $a(t)$، مسافتی (d) را که یک پرتو نور از زمان تابش (زمانی که فوتون تولید می شود) تا زمان جذب (زمانی که فوتون توسط ابزار های ما رصد می شود)، در چارچوب همراه، می پیماید از رابطه زیر به دست می آید

$$d = x(t_e) - x(t_.) = \int_{t_e}^{t_.} \frac{cdt'}{a(t')}$$

که در آن $a(t)$ ضریب مقیاس تابعی از زمان، c سرعت نور، t_e زمان تابش فوتون و $t_.$ زمان حال یا زمان رصد فوتون و به همین ترتیب $x(t_e)$ مکان فوتون در زمان تابش و $x(t_.)$ مکان فوتون در زمان رصد در چارچوب همراه است. در کیهان شناسی چارچوب همراه چارچوبی است که در آن مختصات و فواصل در یکای ضریب مقیاس اندازه گیری می‌شوند. برای تعیین فواصل در این دستگاه باید ابتدا مختصات را در چارچوب فیزیکی تعیین کنیم و سپس آن را به ضریب مقیاس تقسیم کنیم. در رابطه بالا cdt' مسافت فیزیکی است که نور در زمان dt' می پیماید با تقسیم این مسافت بر ضریب مقیاس و انتگرال گیری روی زمان کل مسافت طی شده توسط فوتون در چارچوب همراه به دست می آید. چون مختصات فیزیکی و ضریب مقیاس هردو به یک نسبت در عالم منبسط می شوند مختصات در دستگاه همراه، همواره ثابت می ماند. توجه کنید که مبداء دستگاه مختصات همراه که x در آن اندازه‌گیری می شود روی زمین است.

بدون توجه به جزئیات مهبانگ، در نظر بگیرید که همه نقاط عالم در لحظه مهبانگ در یک نقطه متمرکز بوده‌اند. فرض کنید هم زمان با رخ داد مهبانگ یک فوتون هم تابش شده باشد. این فوتون بعد از سفری طولانی در فضا زمان، در زمان حال $(t_.)$ توسط ابزار های نجومی ما روی زمین رصد می شود.

الف) فاصله فیزیکی لحظه‌ای این فوتون را در هر لحظه از زمان (t) از زمین برحسب $t_.$ و c به دست آورید. (۹۰ نمره)

ب) این فوتون در زمان مهبانگ به همراه تمامی نقاط عالم با ما هم مکان بوده است در زمان حال هم که به کمک ابزار های ما رصد شده با ما هم مکان است، بنابراین فاصله فوتون از ما باید یک بیشینه داشته باشد. مقدار بیشینه فاصله فیزیکی را بر حسب پارامتر های مسئله به دست آورید. (۳۰ نمره)

جهان را تخت و ماده غالب در نظر بگیرید در چنین جهانی ضریب مقیاس به شکل

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_.}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

با زمان رابطه دارد.

پاسخ سوال پنجم:

الف) فوتون در زمان رخداد مهبانگ منتشر شده است، بنابراین داریم $t_e = \cdot$. ما فاصله فیزیکی فوتون از زمین را می خواهیم با استفاده از رابطه بالا ابتدا باید مختصات فوتون در چارچوب همراه که مرکز آن روی زمین است به دست آوریم سپس آن را در ضریب مقیاس ضرب کنیم. طبق رابطه داده شده در مسئله داریم

$$x(t) = x(t_e = \cdot) - \int_{\cdot}^{t} \frac{c\,dt'}{a(t')}$$

$$x(t) = x(t_e = \cdot) - c t_{\cdot}^{\frac{۲}{۳}} \int_{\cdot}^{t} \frac{dt'}{t'^{\frac{۲}{۳}}} = x(\cdot) - ۳ c t_{\cdot}^{\frac{۲}{۳}} t^{\frac{۱}{۳}}$$

برای محاسبه $x(\cdot)$ کافی است بدانیم که این فوتون قرار است در زمان $t_{\cdot}$ روز زمین رصد شود بنابراین مختصات همراه این فوتون در زمان حال برابر صفر است

$$x(t_{\cdot}) = x(\cdot) - ۳ c t_{\cdot} = \cdot \implies x(\cdot) = ۳ c t_{\cdot}$$

با جایگذاری مقدار $x(\cdot)$ و ضرب کردن مقدار $x(t)$ در ضریب مقیاس فاصله فیزیکی لحظه ای به دست می‌آید

$$r(t) = \left(\frac{t}{t_{\cdot}}\right)^{\frac{۲}{۳}} \left(۳ c t_{\cdot} - ۳ c t_{\cdot}^{\frac{۲}{۳}} t^{\frac{۱}{۳}}\right) = ۳ c t_{\cdot} \left[\left(\frac{t}{t_{\cdot}}\right)^{\frac{۲}{۳}} - \frac{t}{t_{\cdot}}\right]$$

ب) در این قسمت باید از $r(t)$ نسبت به زمان مشتق بگیریم

$$\frac{dr}{dt} = ۲c \left(\frac{t_{\cdot}}{t}\right)^{\frac{۱}{۳}} - ۳c = \cdot \implies t = \frac{۸}{۲۷} t_{\cdot}$$

اگر این مقدار را در رابطه $r(t)$ جایگذاری کنیم فاصله بیشینه به دست می آید

$$r\left(\frac{۸}{۲۷} t_{\cdot}\right) = ۳ c t_{\cdot} \left[\left(\frac{۸}{۲۷}\right)^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۸}{۲۷}\right] = ۰/۴۴\ c t_{\cdot}$$

سؤال ششم: (۱۵۰ نمره)

دو ستاره داریم که هم‌اکنون در مختصات زیر هستند:

$$A\begin{cases}\alpha = ۲^h۳۲^m \\ \delta = ٤۲^\circ\end{cases} \qquad B\begin{cases}\alpha = ۲^h۳۲^m \\ \delta = ٦۱^\circ\end{cases}$$

همان‌طور که مشخص است این دو ستاره هم اکنون هم‌بعد هستند.

الف) حساب کنید چند سال دیگر دوباره این دو ستاره هم‌بعد خواهند شد؟ این مدت زمان را Δt می‌نامیم. (٤۰ نمره)

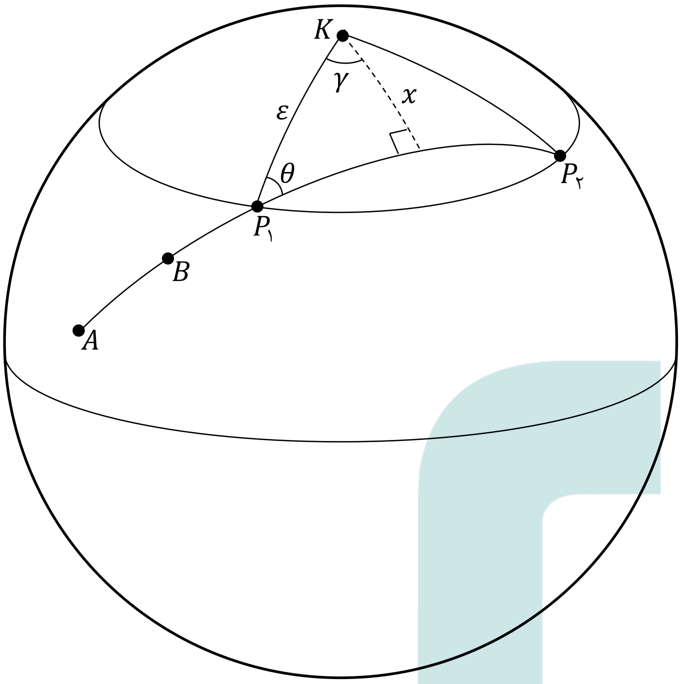
ب) بعد از گذشت هزار سال از زمان حال، بیشینه عرض جغرافیایی که می‌تواند این دو ستاره را هم‌سمت ببیند چقدر است؟ (۵۰ نمره)

ج) ثابت کنید بعد از گذشت $\frac{\Delta t}{۲}$ از زمان حال، فاصله زمانی دوبار هم‌سمت شدن پیاپی این دو ستاره برای ناظری در عرض جغرافیایی ϕ از رابطه زیر پیروی می کند:

$$\Delta H = ۲\cos^{-۱}(Q\tan\phi)$$

که در آن Q یک ثابت است و مقدار عددی آن را نیز محاسبه کنید. (٦۰ نمره)

پاسخ سوال ششم :



الف) برای هم‌بعد شدن باید دایره عظیمه AB از قطب بگذرد. این اتفاق در دو نقطه میفتد که اختلاف زمانی این دو نقطه خواسته این بخش است.

$$\theta = ۱۸۰^o - (۹۰^o + \alpha) = ۹۰^o - \alpha$$

$$\cos ۹۰^o = -\cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma\cos\varepsilon$$

$$\rightarrow \tan\gamma = \frac{\tan\alpha}{\cos\varepsilon} \rightarrow \gamma = ۴۰/۴۳^o$$

$$\Delta t = (۳۶۰^o - ۲\gamma) \times \frac{۲۶۰۰۰}{۳۶۰} = ۲۰۱۶۰ \text{ سال}$$

ب) برای هم‌سمتی در این حالت باید سرسو از دایره عظیمه AB بگذرد. بیشترین عرض جغرافیایی ممکن وقتی است که از قطب شمال سماوی در این لحظه (P') به این دایره عظیمه عمود کنیم. شکل در صفحه بعد آمده است.

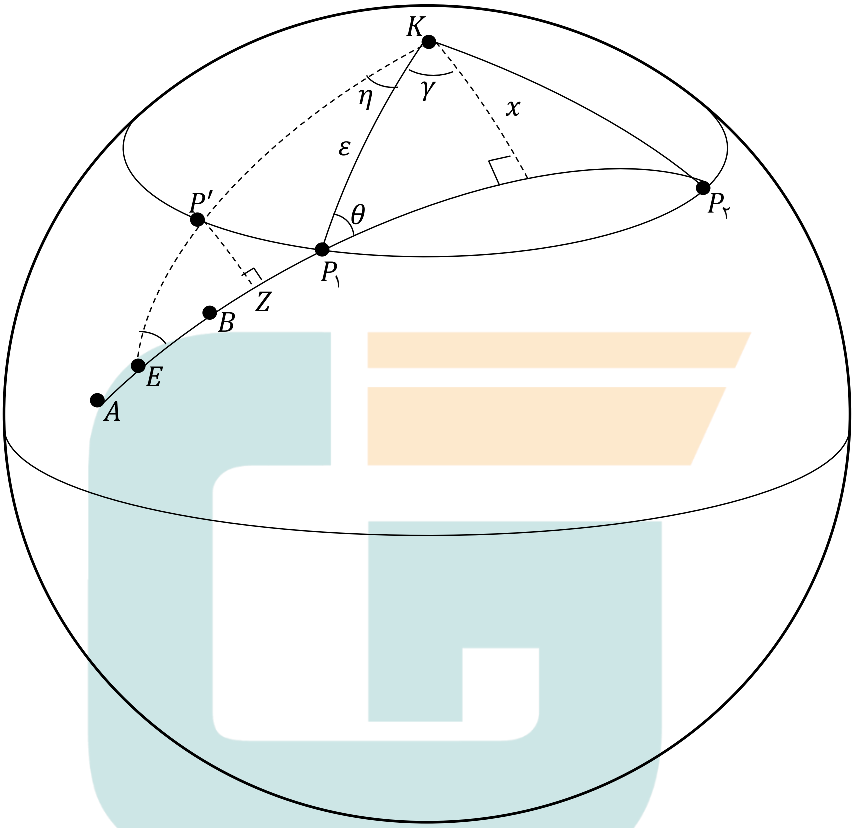
$$\eta = \frac{۱۰۰۰}{۲۶۰۰۰} \times ۳۶۰^o = ۱۳/۸۵^o \quad , \quad \sin x = \sin\theta\sin\varepsilon \rightarrow x = ۱۸/۳۱^o$$

$$\cos E = -\cos ۹۰^o \cos(\eta+\gamma) + \sin ۹۰^o \sin(\eta+\gamma)\cos x \rightarrow E = ۳۹/۵۸^o$$

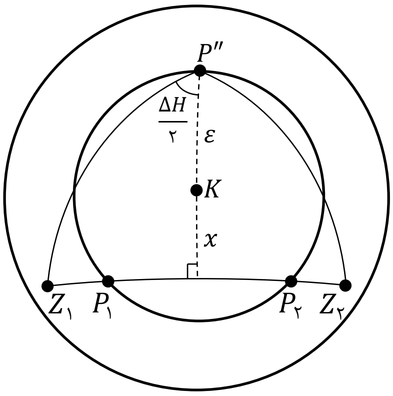
$$\cos(\eta+\gamma)\cos x = \sin x \cot KE - \sin(\eta+\gamma)\cot ۹۰^o \rightarrow KE = ۲۹/۵۴^o$$

$$P'E = KE - \varepsilon \rightarrow P'E = ۶/۰۴^o$$

$$\sin P'Z = \sin E \sin P'E \rightarrow P'Z = ۳/۸۵^o \quad , P'Z = ۹۰^o - \phi_{\max} \rightarrow \phi_{\max} = ۸۶/۱۶^o$$



ج) در این حالت قطب شمال سماوی را P'' می‌نامیم و چون این نقطه دقیقا بین $P_۱$ و $P_۲$ است پس تقارن در مساله وجود دارد و با توجه به سرسوی ناظر فاصله $P''Z_۱$ و $P''Z_۲$ نیز در هر صورت برابر خواهد بود.



$$P''Z_۱ = P''Z_۲ = ۹۰^o - \phi$$

$$\cos\frac{\Delta H}{۲}\cos(\varepsilon + x) = \sin(\varepsilon + x)\tan\phi - \sin\frac{\Delta H}{۲}\cot ۹۰^o$$

$$\rightarrow \Delta H = ۲\cos^{-۱}(\tan(\varepsilon + x)\tan\phi) = ۲\cos^{-۱}(Q\tan\phi)$$

$$Q = \tan(\varepsilon + x) = ۰/۸۹۴$$

سؤال هفتم: (۱٤۰ نمره)

کهکشانی با تعداد $۱۰^{۱۱}$ ستاره را در نظر بگیرید که در ابتدای شکل گیری $(t = ۰)$ از سه نوع ستاره با قدرهای مطلق $M_۱ = ۵$ و $M_۲ = ۲.۵$ و $M_۳ = ۰$ تشکیل شده است. اگر نسبت تعداد ستاره ها به صورت $\frac{N_۱}{N_۲} = ۱۰$ و $\frac{N_۲}{N_۳} = ۱۰$ باشد، مقادیر جرم کهکشان (m)، درخشندگی کل (L)، قدر مطلق کل (M) و نسبت جرم به درخشندگی $(\frac{m}{L})$ را در زمان های خواسته شده در جدول زیر محاسبه کنید.

فرض کنید ستاره های این کهکشان در روند تحولی خود تبدیل به کوتوله سفید می شوند که جرم آنها با جرم اولیه ستاره به شکل زیر رابطه دارد

$$m_{wd} = ۰/۰۸\, m_i + ۰/٤۸\, m_\odot$$

در این رابطه m_i جرم اولیه ستاره است.

	$t = ۰$	$t = ۰/۵\ Gyr$	$t = ۲/۵\ Gyr$
m			
L			
$\frac{m}{L}$			
M			

توجه: منظور از جرم در این سوال جرم ستاره ای و بازمانده‌های ستاره‌ایست. از درخشندگی کوتوله های سفید صرف نظر کنید. در این سوال مشروح محاسبات باید در پاسخ نامه بیاید. بعد از اینکه محاسبات را انجام دادید جدولی شبیه جدول بالا در پاسخ نامه رسم کنید و نتایج محاسبات خود را در آن وارد کنید. توجه کنید که برگه سوال تصحیح نخواهد شد. همه موارد خواسته شده در جدول را بر حسب مقادیر خورشیدی ($m_\odot$ و $L_\odot$ و $\left(\frac{m}{L}\right)_\odot$) بیان کنید. $(۱\ Gyr = ۱۰^{۹} yr)$

پاسخ سوال هفتم :

ابتدا تعداد ستاره های هرگونه و نیز درخشندگی آن‌ها را محاسبه می‌کنیم :

$$N_۱ + N_۲ + N_۳ = ۱۰^{۱۱}$$

$$\rightarrow N_۳ + ۱۰N_۳ + ۱۰۰N_۳ = ۱۰^{۱۱}$$

$$\rightarrow N_۳ = \frac{۱۰^{۹}}{۱/۱۱} \quad , \quad N_۲ = \frac{۱۰^{۱۰}}{۱/۱۱} \quad , \quad N_۱ = \frac{۱۰^{۱۱}}{۱/۱۱}$$

$$M_۱ - M_\odot = -۲/۵Log\frac{L_۱}{L_\odot} \rightarrow ۵ - ۴/۷۴ = ۲/۵Log\frac{L_۱}{L_\odot} \rightarrow L_۱ = ۰/۸L_\odot$$

$$M_۲ - M_\odot = -۲/۵Log\frac{L_۲}{L_\odot} \rightarrow L_۲ \approx ۷/۹\,L_\odot \rightarrow L_۲ \approx ۸L_\odot$$

$$M_۳ - M_\odot = -۲/۵Log\frac{L_۳}{L_\odot} \rightarrow L_۳ \approx ۷۸/۷\,L_\odot \rightarrow L_۳ \approx ۸۰L_\odot$$

در لحظه $t = ۰$

$$L_{tot}(۰) = N_۱L_۱ + N_۲L_۲ + N_۳L_۳ = ۲/۱۴ \times ۱۰^{۱۱}L_\odot$$

$$M_{tot}(۰) - M_\odot = -۲/۵Log\frac{L_{tot(۰)}}{L_\odot} \rightarrow M_{tot}(۰) = -۲۳/۵۸$$

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{۳} \rightarrow \begin{cases} m_۱ \approx ۰/۹۳m_\odot \\ m_۲ \approx ۲\;\; m_\odot \\ m_۳ \approx ۴/۳m_\odot \end{cases}$$

جرم گونه های مختلف ستاره

$$M_{tot}(۰) = \sum N_im_i = N_۱m_۱ + N_۲m_۲ + N_۳m_۳ = ۱/۰۵ \times ۱۰^{۱۱}\,m_\odot$$

$$(\frac{m}{L})_{(۰)} \approx ۰/۴۹۴ \quad \frac{m_\odot}{L_\odot}$$

برای زمان‌های بعدی ابتدا طول عمر رشته اصلی ستارگان و نیز جرم ستاره کوتوله سفید مربوطه را باید محاسبه کنیم:

$$\frac{\tau}{\tau_{\odot}}=\left(\frac{m}{m_{\odot}}\right)\rightarrow \tau_{۱}=۱۰\ Gyr\ (۰/۹۳)^{-۲/۵}\rightarrow \tau_{۱}=۱۱/۹\ Gyr$$

$$\tau_{۲}=۱/۷۶\ Gyr \qquad \tau_{۱}=۰/۲۶\ Gyr$$

پس در زمان $t=۲/۵\ Gyr$ ستاره های نوع ۲ حتما به کوتوله سفید تبدیل شده اند.

در زمان $t=۰/۵\ Gyr$ ستاره های نوع ۳ نیز به کوتوله سفید تبدیل شده اند.

و فقط سهم جرم کوتوله‌ای لحاظ می‌شود.

$$m_{wd,۲}=۰/۰۸\times(۲)+۰/۴۸\rightarrow m_{wd,۲}=۰/۶۴m_{\odot}$$

$$m_{wd,۳}=۰/۰۸\times(۴/۳)+۰/۴۸\rightarrow m_{wd,۳}=۰/۸۲۴m_{\odot}$$

در زمان $t=۰/۵\ Gyr$

$$L_{tot}=N_{۱}L_{۱}+N_{۲}L_{۲}=۱/۴۳\times۱۰^{۱۱}L_{\odot}$$

$$M_{tot}-M_{\odot}=-۲/۵Log\frac{L_{tot}}{L_{\odot}}\rightarrow M_{tot}=-۲۳/۱۵$$

$$m_{tot}=N_{۱}m_{۱}+N_{۲}m_{۲}+N_{۳}m_{wd,۳}=۱/۰۲\times۱۰^{۱۱}$$

$$\left(\frac{m}{L}\right)=\left(\frac{m_{tot}}{L_{tot}}\right)(t=۰/۵Gyr)=۰/۷۱\frac{m_{\odot}}{L_{\odot}}$$

در زمان $t = ۲/۵Gyr$

$$L_{tot} = N_۱ L_۱ = \frac{۱۰^{۱۱}}{۱/۱۱} \times ۰/۸ = ۰/۷۲ \times ۱۰^{۱۱} L_\odot$$

$$M_{tot} - M_\odot = -۲/۵ Log \frac{L_{tot}}{L_\odot} \rightarrow M_{tot} = -۲۲/۴$$

$$m_{tot} = N_۱ m_۱ + N_۲ m_{wd,۲} + N_۳ m_{wd,۳}$$

$$= \frac{۱۰^{۱۱}}{۱/۱۱} \times ۰/۹۳ + \frac{۱۰^{۱۰}}{۱/۱۱} \times ۰/۶۴ + \frac{۱۰^{۹}}{۱/۱۱} \times ۰/۸۲۴$$

$$m_{tot} = ۰/۹۰۲ \times ۱۰^{۱۱} m_\odot$$

$$\left(\frac{m}{L}\right) = \left(\frac{m_{tot}}{L_{tot}}\right)(t = ۲/۵Gyr) = ۱/۲۵ \frac{m_\odot}{L_\odot}$$

جدول

	$t = ۰$	$t = ۰/۵Gyr$	$t = ۲/۵Gyr$
m	$۱/۰۵ \times ۱۰^{۱۱}$	$۱/۰۲ \times ۱۰^{۱۱}$	$۰/۹۰۲ \times ۱۰^{۱۱}$
l	$۲/۱۴ \times ۱۰^{۱۱}$	$۱/۴۳ \times ۱۰^{۱۱}$	$۰/۷۲ \times ۱۰^{۱۱}$
m/L	$۰/۴۹۴$	$۰/۷۱$	$۱/۲۵$
M	$-۲۳/۵۸$	$-۲۳/۱۵$	$-۲۲/۴$

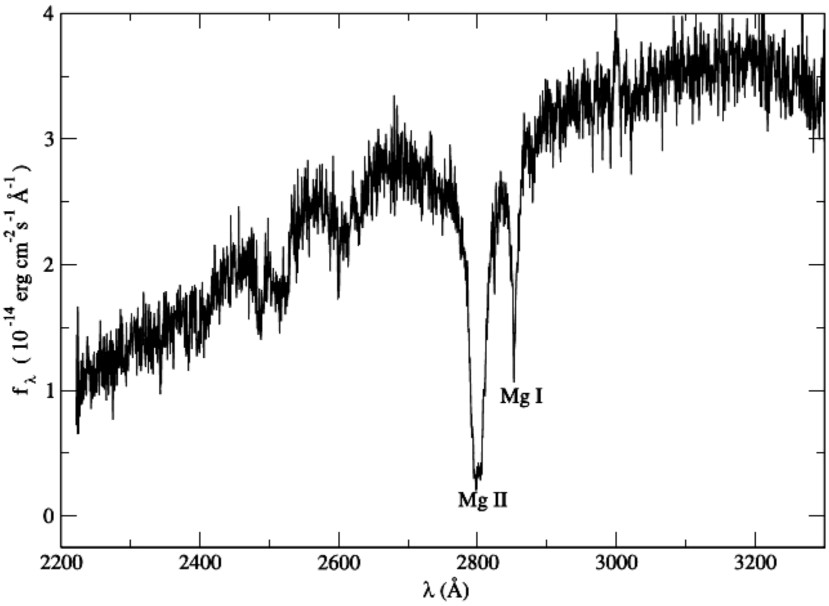
توجه :

پاسخ‌هایی که با فرض رابطه $L = m^{۳/۵}$ انجام داده اند نیز نمره کامل را خواهند گرفت.

سؤال هشتم: (۱۳۰ نمره)

در تصویر زیر نمودار نورسنجی از یک کوتوله سفید DZ و سرد (Cool DZ White Dwarf) در محدوده پرتوهای فرابنفش نشان داده شده است. این دسته از کوتوله های سفید کمی سردتر و با خطوط فلزیِ بیشتر نسبت به هیدروژن و هلیوم در طیف خود هستند.

در این نورسنجیِ تصحیح شده (اثرات حرکتی و ناشی از انتقال به قرمز حذف شده اند)، خطوط جذبی عنصر منیزیم خنثی Mg و یونیزه Mg^{+} بخوبی مشخص هستند؛ که به ترتیب در طول موج های ۲۸۵۲ و ۲۷۹۹ آنگستروم ثبت شده اند.



الف) مشخص کنید دمای مؤثر سطحی برای این ستاره حدوداً چقدر است؟(۱۵ نمره)

ب) اگر انرژی یونش برای این عنصر ۷۳۸ کیلوژول بر مول باشد، هر اتم منیزیم در چه دمایی یونیزه می شود؟ آیا در سطح این ستاره اکثر منیزیم ها یونیزه اند؟ بله یا خیر؛ فقط توضیح دهید. (۲۵ نمره)

ج) شار دریافتی یا روشنایی در قله این نمودار چند وات بر متر مربع در هر نانومتر است؟ هر اِرگ 10^{-7} ژول است. (۲۵ نمره)

د) می دانیم برای این ستارگان با توجه به برقراری تعادل هیدرواستاتیک، رابطه شعاع-جرم بصورت $R_{wd} = M_{wd}^{-\frac{1}{3}}$ است. اگر جرم این ستاره در ابتدا ۱/۵ برابر جرم خورشید بوده باشد و بدانیم خورشید در انتهای عمرش به یک کوتوله سفی

د با شعاع $\frac{1}{74}$ مقدار کنونی تبدیل خواهد شد، تابندگی این ستاره را بدست آورید. (۲۵ نمره)

هـ) اگر بخواهیم با استفاده از خط جذبی $MgII$ اثر انتقال به قرمز گرانشی را در طیف سنجی از این ستاره تشخیص دهیم، حداقل وضوح طیف سنج چقدر باید باشد؟ این ستاره نسبت به ما حرکت شعاعی ندارد. (۴۰ نمره)

توجه: در این سوال برای تعیین جرم کوتوله سفید از رابطه ای که در مسئله هفتم داده شده کمک بگیرید.

پاسخ سوال هشتم :

الف) اگر قله نمودار تابش پلانک را در حدود ۳۲۰۰A° در نظر بگیریم:

$$\lambda_{max}.T_{eff} = ۲/۸۹۸ \times ۱۰^{-۳} \rightarrow T_{eff} = \frac{۲/۸۹۸ \times ۱۰^{-۳}}{۳/۲ \times ۱۰^{-۷}} \cong ۹۰۵۶\, K$$

البته این مقدار حدوداً دقیق است و کلیه پاسخها در بازه ۹۰۰۰ تا حدود ۹۲۰۰ کلوین درست هستند.

ب) انرژی یونش $۷۳۸\ \frac{KJ}{mol}$ است؛ در نتیجه انرژی یونش برای هر اتم خواهد بود :

$$\frac{۷۳۸ \times ۱۰^{۳}}{۶/۰۲۲ \times ۱۰^{+۲۳}} = ۱/۲۳ \times ۱۰^{-۱۸} Joule\ (= ۷/۶۵\ eV) \equiv \frac{۳}{۲}KT$$

$$\rightarrow T = \frac{۱/۲۳ \times ۱۰^{-۱۸}}{۱/۵ \times ۱/۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}} \cong ۵۹۲۰۰\, K$$

با مقایسه دماهای بدست آمده در موارد فوق، مشخص است که در سطح ستاره با دمای مؤثری که بدست آمد، اکثر اتم های منیزیم غیرِ یونیزه باقی خواهند ماند. به همین علت الکترون های مقید به هسته ها قادر به ایجاد خطوط جذبِی مشاهده شده در طیف خواهند بود.

ج) اگر قله نمودار در $\frac{Erg}{cm^{۲}.sec.A^\circ}$ $۳/۶ \times ۱۰^{-۱۴}$ باشد :

$$۳/۶ \times ۱۰^{-۱۴} \times \frac{۱}{۱۰^{+۷}} \times ۱۰^{+۴} \times ۱۰ = ۳/۶ \times ۱۰^{-۱۶} \frac{watt}{m^{۲}.nm}$$

(تبدیل واحد های انجام شده، بترتیب برای تبدیل اِرگ به ژول، سانتیمتر مربع به متر مربع و نیز آنگستروم به نانومتر است.)

البته اعداد خوانده شده از روی نمودار می توانند در بازه ۳/۵ تا $۳/۶ \times ۱۰^{-۱۴}$ نیز باشند...

د) با استفاده از رابطه جرم نهایی برای کوتوله های سفید، برای خورشید و این ستاره داریم :

$$M_{wd,\odot} = ۰/۰۸M_\odot + ۰/۴۸M_\odot = ۰/۵۶M_\odot$$
$$M_{DZ} = ۰/۰۸ \times ۱/۵M_\odot + ۰/۴۸M_\odot = ۰/۶۰M_\odot$$

$$\frac{R_{DZ}}{R_{wd,\odot}} = \left(\frac{M_{DZ}}{M_{wd,\odot}}\right)^{-\frac{۱}{۳}} \rightarrow R_{DZ} = \frac{۱}{۷۴} \times ۶/۹۶ \times ۱۰^{۸} \times \left(\frac{۰/۶۰}{۰/۵۶}\right)^{-\frac{۱}{۳}} \cong ۹/۲ \times ۱۰^{۶}\, m$$

$$\rightarrow L_{DZ} = ۴\pi R_{DZ}^{۲}\sigma T_{DZ}^{۴} = ۴/۰۵ \times ۱۰^{۲۳} watt$$

این مقدار نیز با توجه به بازه های قابل قبول در موارد (الف) و (ب) نمره دهی خواهد شد.

ه) اگر حرکت شعاعی نداشته باشیم تنها انتقال به قرمز گرانشی دخیل است :

$$z_g \equiv \frac{\Delta\lambda_{Mg\text{II}}}{\lambda_{Mg\text{II}}} = \frac{۱}{\left(۱ - \frac{R_{Sch}}{R_{DZ}}\right)^{\frac{۱}{۲}}} - ۱ = \frac{۱}{\left(۱ - \frac{۲GM_{DZ}}{R_{DZ}c^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}} - ۱$$

$$z_g = \frac{۱}{\left(۱ - \frac{۲ \times ۶٫۶۷۳ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۰٫۶ \times ۱٫۹۹ \times ۱۰^{۳۰}}{۹٫۲ \times ۱۰^{۶} \times ۹ \times ۱۰^{۱۶}}\right)^{\frac{۱}{۲}}} - ۱ = ۹٫۶۲ \times ۱۰^{-۵}$$

$$\rightarrow \Delta\lambda_{Mg\mathrm{II}} = \grave{z}_g . \lambda_{Mg\mathrm{II}} = ۹٫۶۲ \times ۱۰^{-۵} \times ۲۷۹۹ \cong ۰٫۲۷A^{\circ} \equiv ۰٫۰۲۷nm$$

و می دانیم که حداقل وضوح طیف سنجی نیز می تواند در همین حد باشد، تا بتوان تشخیص داد.