هفدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه پاسخ نامه سؤالات آزمون مرحله 2 سال تحصیلی 1400-1399

نهایی

نکات بسیار مهم

لطفاً قبل از شروع پاسخگویی به سؤالات، این قسمت را به دقت بخوانید. برای خواندن این قسمت 10 دقیقه وقت اضافه در نظر گرفته شده است.

1) این آزمون حاوی 8 سؤال تشریحی است. مجموع کل نمره این آزمون 1000 نمره است که بسته به نوع سؤالات بین 8 سؤال توزیع شده است. در سؤالاتی که بخش‌های الف و ب و ج و ... دارند، نمره هر بخش به تفکیک داده شده است.

2) در سؤالاتی که به جواب عددی منتهی می‌شوند، دقتِ پاسخ داده شده است. در این سؤالات نمره پاسخ نهایی وقتی داده خواهد شد که پاسخ نهایی در محدوده دقت باشد. منظور از محدوده دقت این است که اگر پاسخ نهایی A و دقت پاسخ X باشد، جواب‌هایی که در بازه $[A - X\ , A + X]$ باشند پذیرفته خواهند شد. مثلاً فرض کنید در یک سؤال از شما خواسته باشند یک زاویه را حساب کنید و دقت پاسخ را یک درجه داده باشند. فرض کنید جواب درست 135 درجه باشد، در این صورت اگر جواب شما بزرگتر و مساوی 134 و کوچکتر و مساوی 136 باشد، نمره پاسخ نهایی را خواهید گرفت. در غیر این صورت نمره پاسخ نهایی شما کمتر و در بخش‌هایی دارای نشر خطا است. توجه داشته باشید که این موضوع فقط مربوط به پاسخ نهایی سؤال است و شامل بخش های دیگر پاسخ نمی‌شود. مثل نوشتن روابط لازم و حل معادلات، رسم شکل و غیره. اگر در سؤالی دقت جواب نهایی داده نشده باشد، مقدار پیش فرض X برابر است با $X = 0.1A$.

3) دقت کنید که تمامی مقادیر ثابت باید از جدول ثوابت که در ابتدای سؤالات آمده گرفته شوند. اگر شما خواستید سؤالی را از یک روش ابتکاری و جدید حل کنید و نیاز به ثابتی داشتید که در جدول ثوابت نبود، حتماً آن ثابت را در ابتدای پاسخ خود به سؤال، داخل کادر بنویسید. در این مورد اگر راه حل شما درست باشد و پاسخ شما هم در محدوده دقت باشد، نمره کامل خواهید گرفت.

4) برای دقت و خوانایی بیشتر و ممانعت از محدودیت‌های نرم افزار مایکروسافت Word فارسی، در این آزمون از اعداد انگلیسی استفاده شده است. شما در پاسخنامه می‌توانید به اختیار خود از اعداد فارسی و یا انگلیسی استفاده کنید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

کمیت		مقدار	
G	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$	6.67×10^{-11}
c	سرعت نور	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	3.00×10^{8}
σ	ثابت استفان-بولتزمان	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	5.67×10^{-8}
ly	سال نوری	m	9.46×10^{15}
pc	پارسک	m	3.09×10^{16}
AU	واحد نجومی	m	1.50×10^{11}
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	1.99×10^{30}
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	6.96×10^{8}
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	3.85×10^{26}
$M_\odot$	قدر مطلق خورشید		$+4.72$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید		-26.8
$T_\odot$	دمای مؤثر سطح خورشید	K	5780
R_m	شعاع ماه	km	1737
r_m	فاصله متوسط ماه از زمین	km	384400
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	5.97×10^{24}
$R_\oplus$	شعاع زمین	km	6380
ϵ	تمایل محور زمین		23.5°

سؤال اول: (100 نمره)

در عرض جغرافیایی ϕ شاخصی به طول l با زاویه $(90 - \phi)$ نسبت به افق، به سمت جنوب قرار گرفته است.

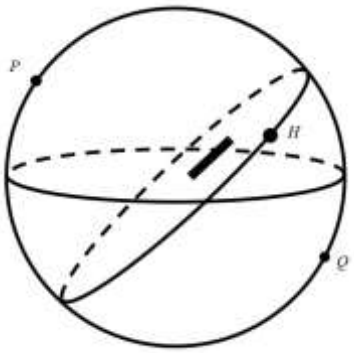
الف) در اعتدالین طول سایه شاخص را برحسب زاویه ساعتیِ خورشید (H) بدست آورید (40 نمره)

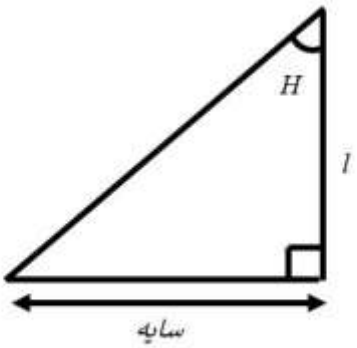
ب) در روز انقلاب تابستانی کمترین طول سایه شاخص چقدر است؟ (60 نمره)

پاسخ:

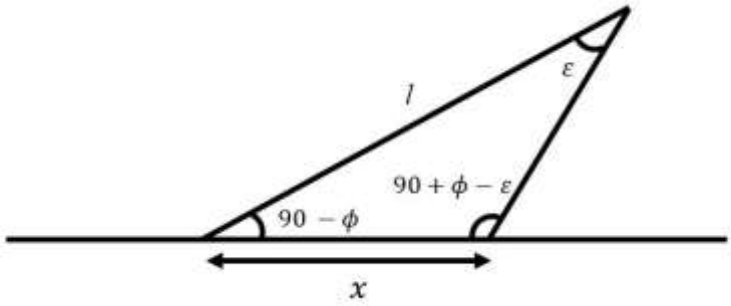
الف)
در اعتدالین چون میل خورشید برابر صفر است پس روی استوای سماوی قرار دارد و چون زاویه‌ی شاخص با جنوب هم $90 - \phi$ است پس راستای شاخص هم در همین صفحه‌ی استوای سماوی قرار دارد. به این ترتیب سایه همیشه بر روی فصل مشترک دو صفحه تشکیل می‌شود که همان راستای شرق به غرب است که مستقل از عرض جغرافیایی است. اندازه طول سایه نیز به این صورت به دست می‌آید:

$$\text{طول سایه} = l\tan H$$





ب) طبق شکل زیر کمینه طول سایه وقتی است که خورشید در بیشترین ارتفاع باشد که همان لحظه ای است که بر روی نصف‌النهار ناظر است:



$$\frac{\boldsymbol{sin\,(90+\phi-\varepsilon)}}{\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{cos\,(\varepsilon-\phi)}}{\boldsymbol{l}}$$

$$\frac{\boldsymbol{cos\,(\varepsilon-\phi)}}{\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{sin\,\varepsilon}}{\boldsymbol{x}}$$

$$\frac{\boldsymbol{coc\,\varepsilon\,cos\,\phi+sin\,\varepsilon\,sin\phi}}{\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{sin\,\epsilon}}{\boldsymbol{x}}$$

$$\frac{\boldsymbol{cot\,\varepsilon\,cos\,\phi+\,sin\phi}}{\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{sin\phi+cos\,\phi\,cot\,\epsilon}}$$

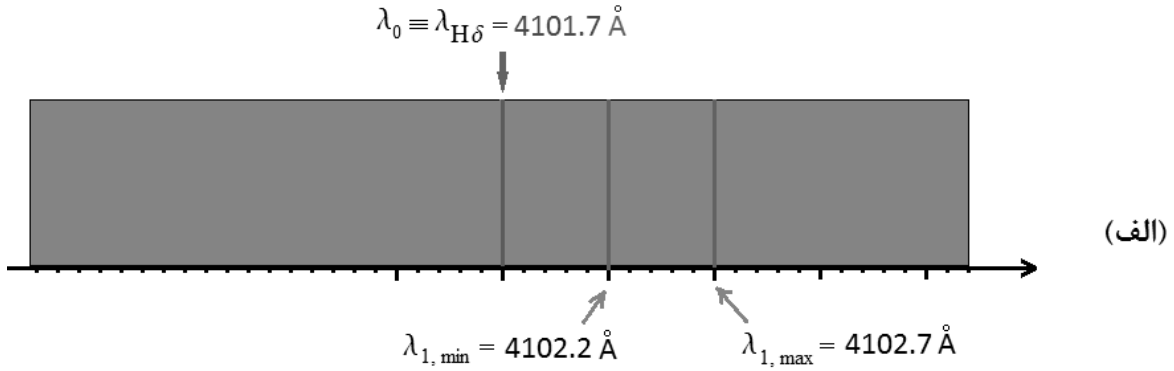
سؤال دوم : (100 نمره)

در نور رسیده از یک چشمه نقطه‌ای در آسمان، شاهد تغییراتی متناوب در روشنی با دوره تناوب 9.3×10^6 ثانیه هستیم. ضمناً این چشمه، طیفی دو-خطی (Double-Line) را به نمایش می‌گذارد که دوره تناوب تغییرات طول موج خطوط جذبی آن‌ها نیز همان 9.3×10^6 ثانیه است. کمینه و بیشینه تغییرات نظیر هر خط در شکل‌های (الف) و (ب) متناظر با خط جذبی بالمِر H_δ با طول موج آزمایشگاهی $\lambda_0 = 4101.7\ \text{Å}$ نشان داده شده است. همچنین طی مشاهداتی ده ساله که با دقت یک ثانیه قوسی انجام شده، هیچ حرکت ویژه‌ای (حرکت خاصه یا Proper Motion) در این سیستم مشاهده نشده است. به همین جهت با فرض اینکه تنها حرکت ممکن این سیستم در راستای دید (حرکت شعاعی) است :

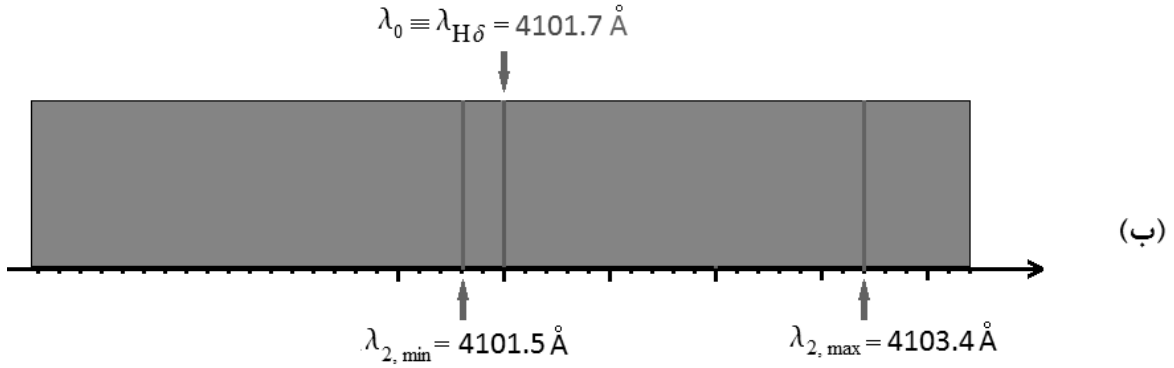
الف) سرعت مرکز جرم و سرعت هر ستاره نسبت به مرکز جرم این سامانه چقدر است؟ (35 نمره)

ب) جرم هر ستاره و شعاع مداری هر یک از آن‌ها چقدر است؟ (35 نمره)

ج) در اندازه‌گیری‌های بعدی با تلسکوپ‌هایی با توان تفکیک 0.01 ثانیه قوسی، فاصله این سامانه از ما حدود 200 پارسک بدست آمده است. آیا نتایجی که بدست آوردید با وجود این یافته همچنان معتبر می‌ماند؟ (30 نمره)



(الف)

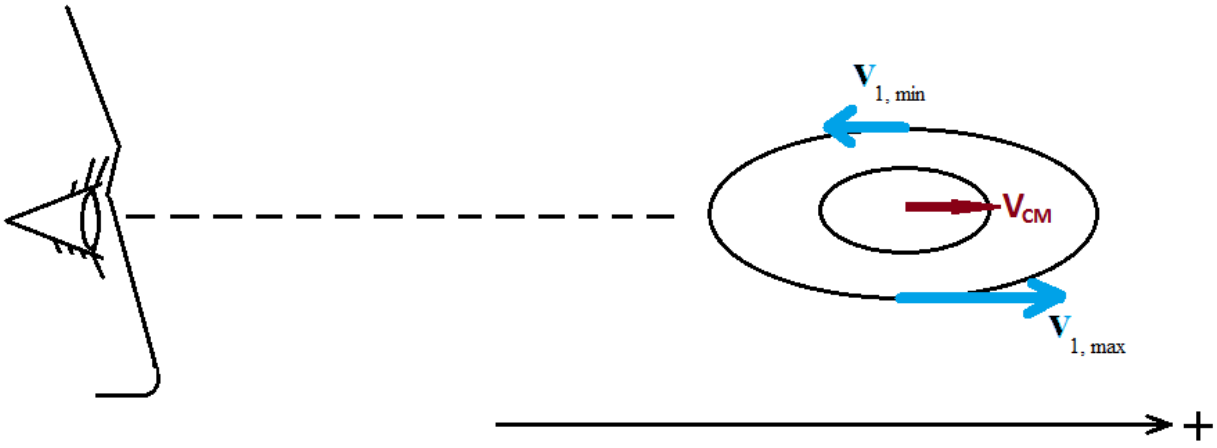


(ب)

پاسخ:

(الف)

سیستم را سنکرون در نظر می‌گیریم و تندی همدم با جرم m_1 را با v_{10} و تندی همدم با جرم m_2 را با v_{20} نشان می‌دهیم. سرعت مرکز جرم را هم با v_{cm} نشان می‌دهیم و با توجه به شکل زیر از قاعده جمع سرعت‌ها داریم:



$$\begin{cases} v_{1,max} = v_{10} + v_{CM} \quad (1) \\ , \\ v_{1,min} = -v_{10} + v_{CM} \quad (2) \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} v_{2,max} = v_{20} + v_{CM} \quad (3) \\ , \\ v_{2,min} = -v_{20} + v_{CM} \quad (4) \end{cases}$$

اما

$$v_{1,max} = \frac{\Delta\lambda_{1,max}}{\lambda_0} c \quad (5),$$

$$v_{1,min} = \frac{\Delta\lambda_{1,min}}{\lambda_0} c \quad (6),$$

$$v_{2,max} = \frac{\Delta\lambda_{2,max}}{\lambda_0} c \quad (7),$$

و

$$v_{2,min} = \frac{\Delta\lambda_{2,min}}{\lambda_0} c \qquad (8).$$

ضمن آنکه پیرو آنچه در صورت مسئله بیان شد:

$$\begin{bmatrix} \Delta\lambda_{1,max} = 1.0\ \text{Å} & (redshifted) \\ \Delta\lambda_{1,min} = 0.5\ \text{Å} & (redshifted) \\ \Delta\lambda_{2,max} = 1.7\ \text{Å} & (redshifted) \\ \Delta\lambda_{2,min} = -0.2\ \text{Å} & (blueshifted) \end{bmatrix}$$

با قرار دادن این مقادیر در (5) تا (8) بدست می‌آوریم:

$$v_{1,max} = 73\ \text{km/s} \quad (5)',$$

$$v_{1,min} = 37\ \text{km/s} \quad (6)',$$

$$v_{2,max} = 124\ \text{km/s} \quad (7)',$$

و

$$v_{2,min} = -15\ \text{km/s} \quad (8)'.$$

اینک، با قرار دادن این نتایج در (1) تا (4) بدست می‌آوریم:

$$v_{CM} = \frac{v_{1,max}+v_{1,min}}{2} = \frac{73+37}{2} = 55\ \text{km/s}$$

یا (9)

$$v_{CM} = \frac{v_{2,max}+v_{2,min}}{2} = \frac{124-15}{2} \approx 55\ \text{km/s}$$

و سپس از (ا) {یا (2)}

$$v_{10} = v_{1,max} - v_{CM} = 73 - 55 = 18\frac{\text{km}}{\text{s}} \qquad (10)$$

و (3) {یا (4)}

$$v_{20} = v_{2,max} - v_{CM} = 124 - 55 = 69\ \text{km} \qquad (11)$$

(ب):

اینک توجه می کنیم که:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{v_{20}}{v_{10}}=\frac{69}{18} \qquad (12)$$

ضمن آنکه از قانون سوم کپلر

$$P^2=\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3 \qquad (13)$$

اما

$$a=a_1+a_2 \qquad (14)$$

و

$$\begin{cases} a_1=\frac{v_{10}}{2\pi}P \\ a_2=\frac{v_{20}}{2\pi}P \end{cases} \qquad (15)$$

با قرار دادن (14) و (15) در (13) :

$$P^2=\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\frac{(v_{10}+v_{20})^3}{(2\pi)^3}P^3$$

پس

$$m_1+m_2=\frac{(v_{10}+v_{20})^3}{2\pi G}P$$

با قرار دادن مقادیر معلوم در این رابطه بدست می‌آوریم:

$$m_1+m_2=1.5\times10^{31}\text{kg} \qquad (16)$$

و سرانجام با داشتن نسبت جرم‌ها از (12):

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{69}{18}\approx 3.8$$

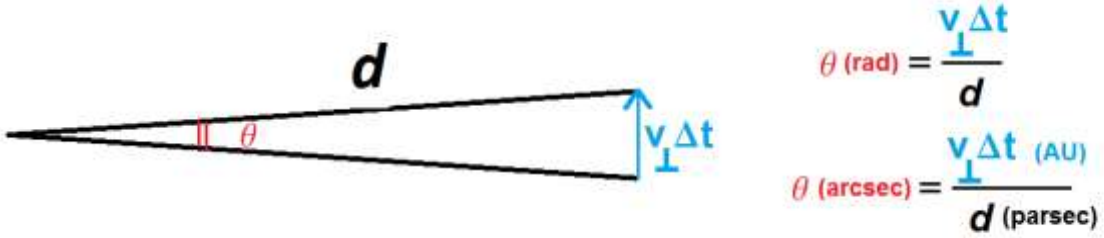
$$\frac{m_1}{m_1+m_2}\approx\frac{3.8}{4.8}\cong 0.8$$

$$m_1\cong 0.8\,(m_1+m_2)=0.8\times 1.5\times10^{31}\text{kg}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_1\cong 1.2\times10^{31}\text{kg} \\ m_2\cong 0.3\times10^{31}\text{kg} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{v_{10}}{2\pi} P = \frac{18\ \mathrm{km/s}}{2 \times 3.14} \times 9.3 \times 10^7 = 2.7 \times 10^{11}\ \mathrm{m} = 1.8\ \mathrm{AU}$$
$$a_2 = \frac{v_{20}}{2\pi} P = \frac{69\ \mathrm{km/s}}{2 \times 3.14} \times 9.3 \times 10^7 = 1.0 \times 10^{12}\mathrm{m} = 6.7\ \mathrm{AU}$$

(ج)



شرط معتبر بودن محاسبات بالا این است که مولفه‌ی عرض سرعت مرکز جرم سیستم نسبت به مولفه‌ی شعاعی آن کوچک باش:

$$\left|\frac{v_\perp}{v_r}\right| \ll 1 \Rightarrow \left|\frac{d \times \theta/\Delta t}{v_r}\right| \ll 1 \Rightarrow$$

$$d \ll \left|\frac{v_r}{\theta/\Delta t}\right|$$

با قرار دادن $v_r \sim 50\ \mathrm{km/s}$ ، $\theta \sim 1'' = \frac{1}{3600} \times \frac{\pi}{180} \approx 4.8 \times 10^{-6}\mathrm{rad}$ و $\approx 3 \times 10^8 \mathrm{s}$ بدست می‌آوریم: $\Delta t = 10\ \mathrm{year}$

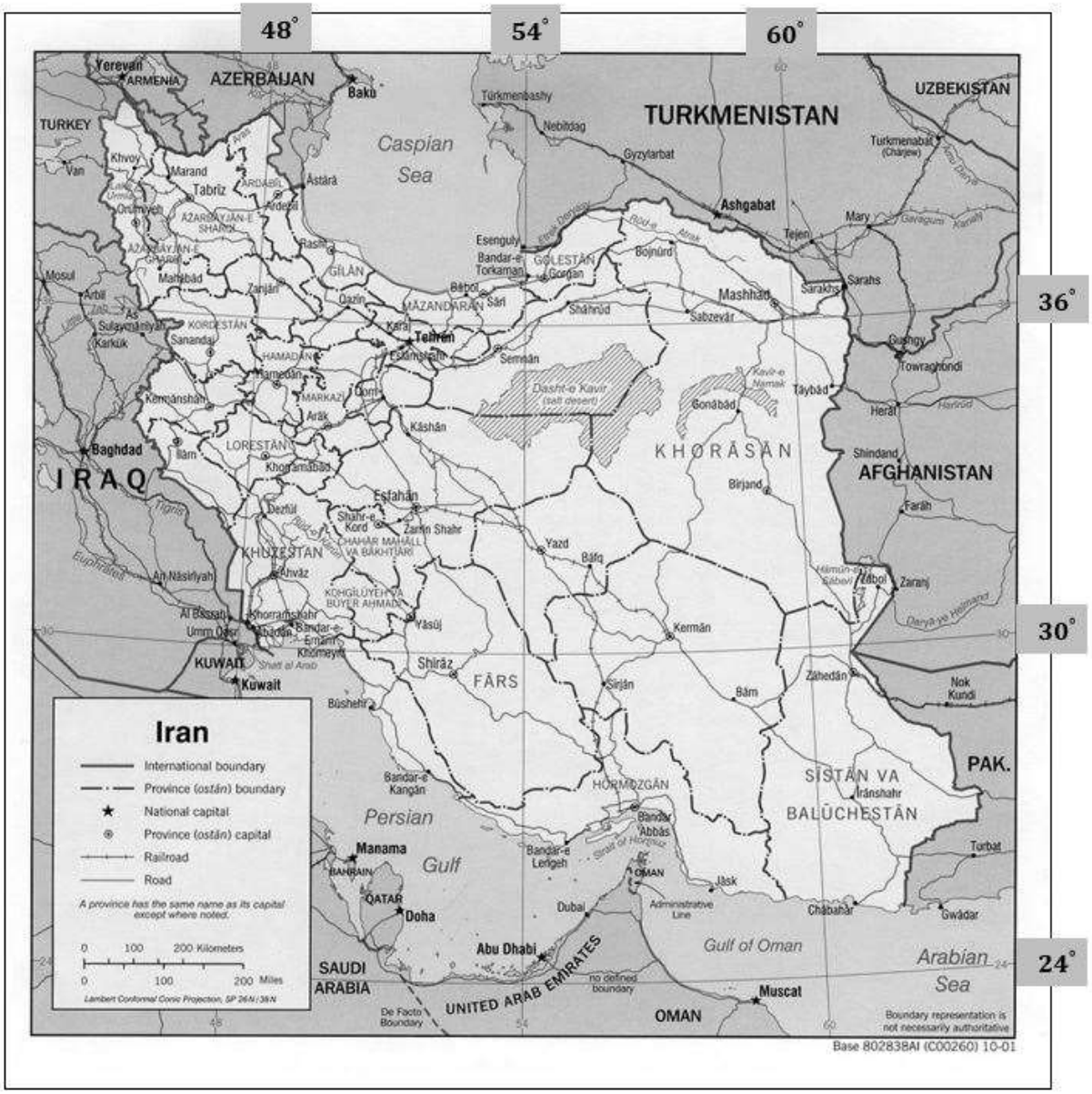
$$d \ll \frac{5 \times 10^4\ \mathrm{m/s}}{(4.8 \times 10^{-6})/(3 \times 10^8 \mathrm{s})} \sim 3 \times 10^{18}\ \mathrm{m} \approx 100\ parsec$$

در حالی که d حدود 200 پارسک بدست آمده و این یعنی سرعت عرضی می توانسته از مرتبه‌ی سرعت شعاعی باشد. و لذا محاسبات ما از اعتبار ساقط می‌شود!

سؤال سوم: (120 نمره)

با توجه به نقشه کشورمان ایران، به سؤالات زیر برای روز انقلاب زمستانی پاسخ دهید :
الف) طول و عرض جغرافیایی نقطه ای را بیابید که در آن اذان ظهر زودتر از همه جا اتفاق می‌افتد؟ (35 نمره)
ب) طول و عرض جغرافیایی نقطه ای را بیابید که پیش از بقیه شاهد طلوع خورشید است؟ (35 نمره)

توجه : قطر ظاهری خورشید '32 و شکست افقی '34 است. طلوع خورشید را لحظه‌ای در نظر می‌گیریم، که لبه بالایی قرص خورشید برای اولین بار در زمین کاملاً مسطح دیده می‌شود. همچنین در این روز تعدیل زمان 2 دقیقه است.

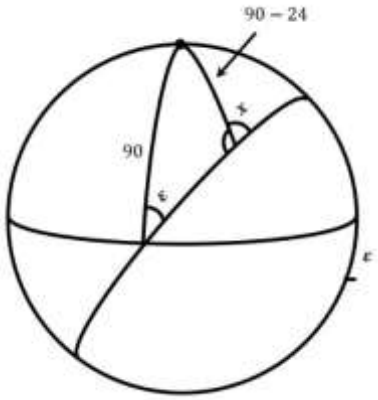


پاسخ:

الف) اذان ظهر همیشه در شرقی‌ترین نقطه زودتر از باقی مکان‌ها رخ می‌دهد پس با اندازه گیری در تصویر ، طول و عرض شرقی ترین نقطه را می یابیم:

$$\phi = 27.2^\circ N$$
$$l = 63.3^\circ E$$

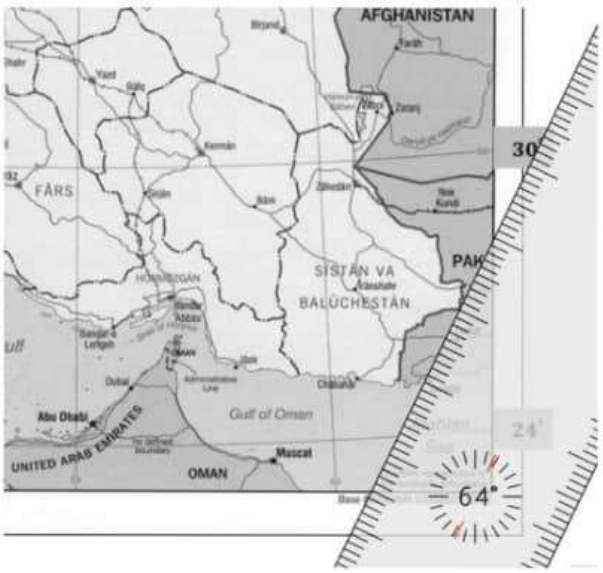
ب)خورشید میلی برابر با ε – دارد و دایره عظیمه‌ای که در موقع طلوع می‌سازد (خط جدا کننده ی روز و شب) در هر عرض جغرافیایی زاویه‌ای با شمال می‌سازد. این زاویه را برای عرض جغرافیایی 24 درجه محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{\cos 24}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin 90}{\sin x}$$

$$\rightarrow x = 26^\circ$$

توجه کنید که عرض جغرافیایی 24 درجه به این دلیل انتخاب شده است که جنوبی‌ترین نقطه ایران است و اگر هر عدد دیگری در نزدیک این بازه را نیز انتخاب می‌کردیم زاویه خط روز و شب تقریبا همین می‌ماند و جواب آخر نیست تغییری قابل توجهی نداشت.
بنابراین مطابق شکل مقابل این نقطه را می یابیم :



$$\phi = 26.7^\circ$$

$$l = 63.3^\circ E$$

ج) برای غروب کردن باید ارتفاع خورشید به اندازه $34 + \frac{32}{2}$ دقیقه قوسی زیر افق باشد.

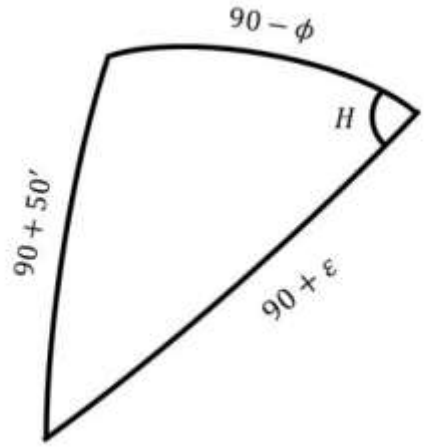
$$-\sin 50' = -Sin\ \phi\ Sin\ \varepsilon + Cos\ \phi\ Cos\ \varepsilon\ Cos\ H$$

$$H = -78.4° = -5\ h\ 14\ m$$

$$E = H_{\odot} - H_M \longrightarrow H_M = H_{\odot} - E \longrightarrow MT = 12\ h + H_M$$

$$MT - ZT = l - l_0 \longrightarrow ZT = MT - (l - l_0)$$

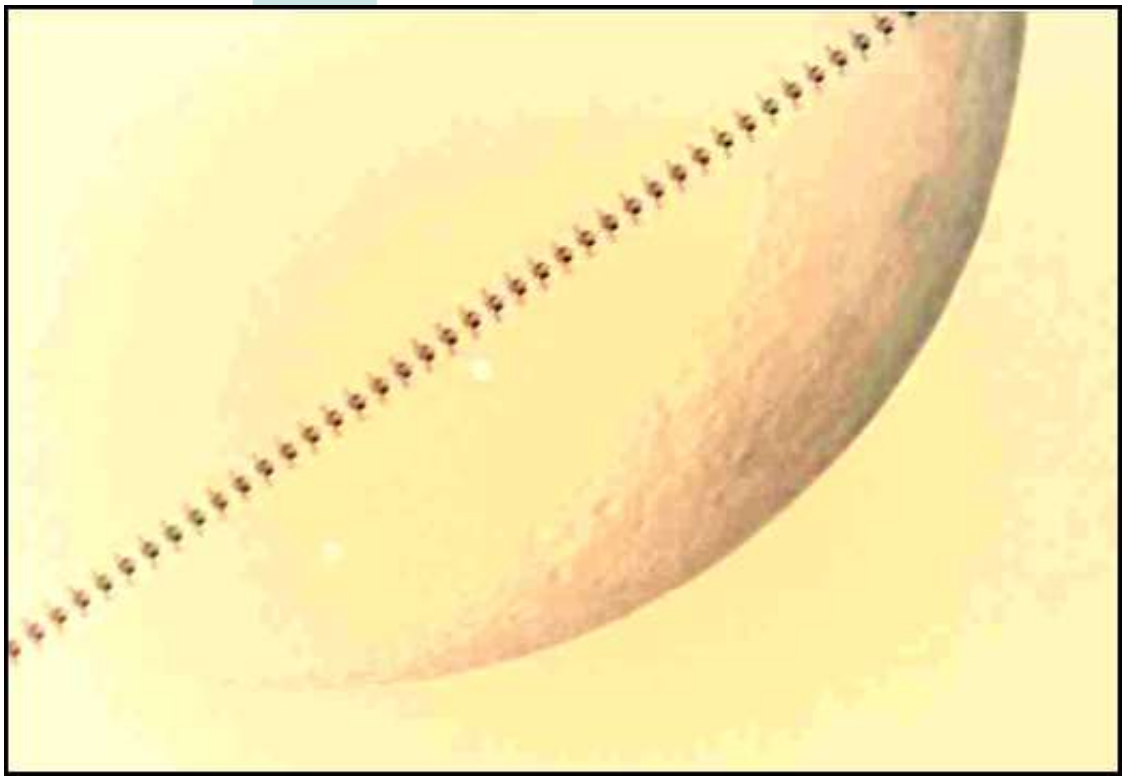
$$= 12\ h + H_{\odot} - E - (l - l_0) = 6\ h\ 01\ m$$



سؤال چهارم: (150 نمره)

ایستگاه فضایی بین‌المللی در مداری دایروی به ارتفاع 432 کیلومتر از سطح دریا در حال حرکت به دور زمین است. این ماهواره از دید ناظران زمین در زمان‌های محدودی قابل رؤیت است. یکی از مواردی که ماهواره از روی سطح زمین قابل رؤیت می‌شود، زمانی است که ناظر در ناحیه تاریک زمین (بخش شب) بوده ولی ماهواره هنوز در ناحیه روز است. این رخداد چیزی در حدود حداکثر یک تا دو ساعت پس از غروب یا پیش از طلوع آفتاب می‌تواند رخ دهد. البته در این مورد دیده شدن ماهواره منوط به شرایط قرارگیری آن نسبت به موقعیت خورشید و ناظر است؛ که چند درصد از نور را در جهت ناظر زمینی بازتاب می‌کند و معمولاً در چنین شرایطی نور ماهواره به خوبی دیده نمی‌شود.

حالت دیگری که ماهواره از دید ناظر زمینی دیده می‌شود، زمانی است که از جلوی قرص ماه یا خورشید گذر می‌کند. در این صورت به دلیل تضاد نوریِ ماهواره با پس زمینه، شکل آن به خوبی دیده می‌شود. عکس زیر توسط یک تلسکوپ 8 اینچ گرفته شده است.



الف) در زمان گذر، ماه و ماهواره با دقت خوبی نزدیک به سرسو بوده اند؛ بنابراین فرض کنید ماهواره دقیقاً از بالای سر ناظر عبور کرده است. با استفاده از اطلاعات موجود در عکس، پهنای ایستگاه فضایی را محاسبه کنید. (30 نمره)
(دقت پاسخ 25%، تا دقت 40% نصف نمره)

ب) شعاع مدار ماهواره و شعاع زمین را در یک شکل نسبت به یکدیگر با حفظ مقیاس رسم کنید. ماه در بینهایت قرار دارد و پهنای زاویه‌ای آن 32 دقیقه قوسی است. (10 نمره)

ج) در هر نقطه از سطح زمین چنین رخدادی قابل رؤیت نیست و فقط یک نوار مشخص روی سطح زمین است که ناظر می‌تواند چنین گذری را مشاهده کند. برای این گذر که در روز 27 فروردین امسال در تهران رخ داده است، با رسم شکل پهنای این نوار را محاسبه کنید. (40 نمره) (رسم شکل 25% از نمره این بخش را دارد)

د) دوره تناوب این ماهواره به دور زمین چند ثانیه است؟ (30 نمره)

هـ) با رسم شکل مدت زمانی که ماهواره از مقابل قرص ماه گذر می‌کند را محاسبه کنید. فرض کنید در نقطه‌ای قرار گرفته‌ایم که گذر ماهواره را از روی قطر قرص ماه مشاهده می‌کنیم. (40 نمره)
(رسم شکل 30% نمره این بخش را دارد)

پاسخ:

الف)

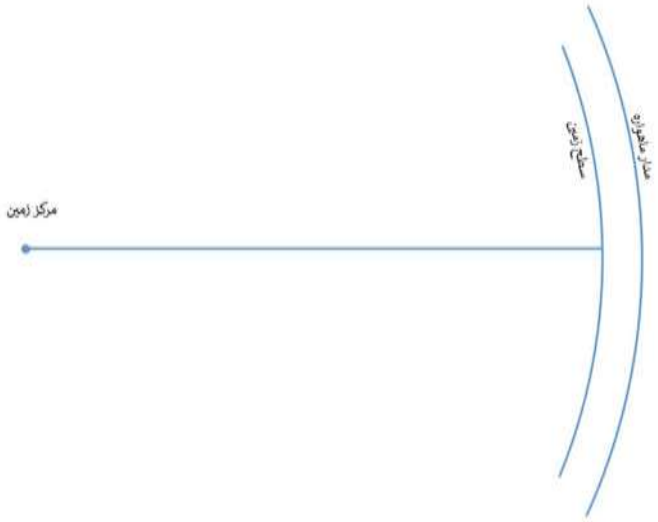
با اندازه گیری عکس تقریبا می توان گفت که پهنای ایستگاه فضایی حدود 1° قوس است.

$$\Delta x = r\theta = 432 \times 10^3\ m * \frac{1}{60} * \frac{3.14}{180}$$

$$\Delta x = 125\ m$$

که پاسخ واقعی 109 متر است.

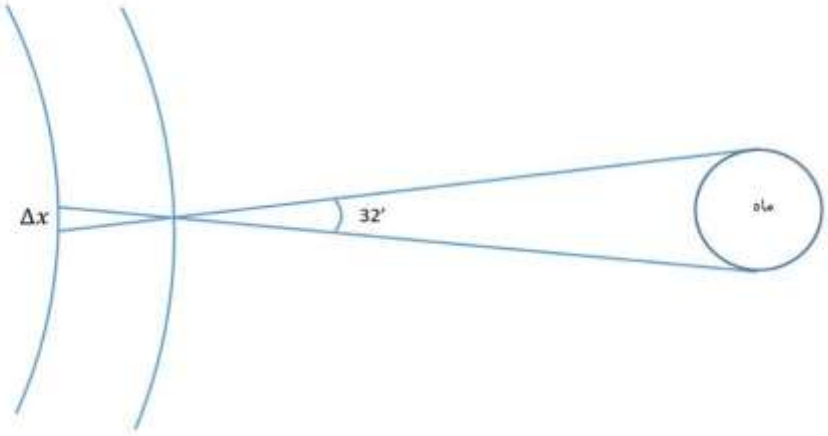
ب)



ج)

$$\Delta x = (\ 432\ km\ ) * 32^{'} = 4019\ m$$

که مقدار واقعی در تهران 3.8 کیلومتر بود.



د)

$$T^2 = \frac{4\ \pi}{G\ (M + m\ )} a^3$$

$$m \ll M \qquad\qquad M = 6 \times\ 10^{24}\ kg$$

$$T^2 = \frac{4 \times 3.14}{6.7 \times 10^{-11} * 6 \times 10^{24}} * (6.8 \times 10^6)^3 = 38 \times 10^5$$

$$T = 5554\ s = 92' ; 30''$$

هـ)

زاویه ای است که ناظر زمینی می بیند. $\theta = 32'$

ϕ زاویه ای که ماهواره در مدار خود طی کرده است.

$$x = 432 * \theta = 6800 * \varphi$$

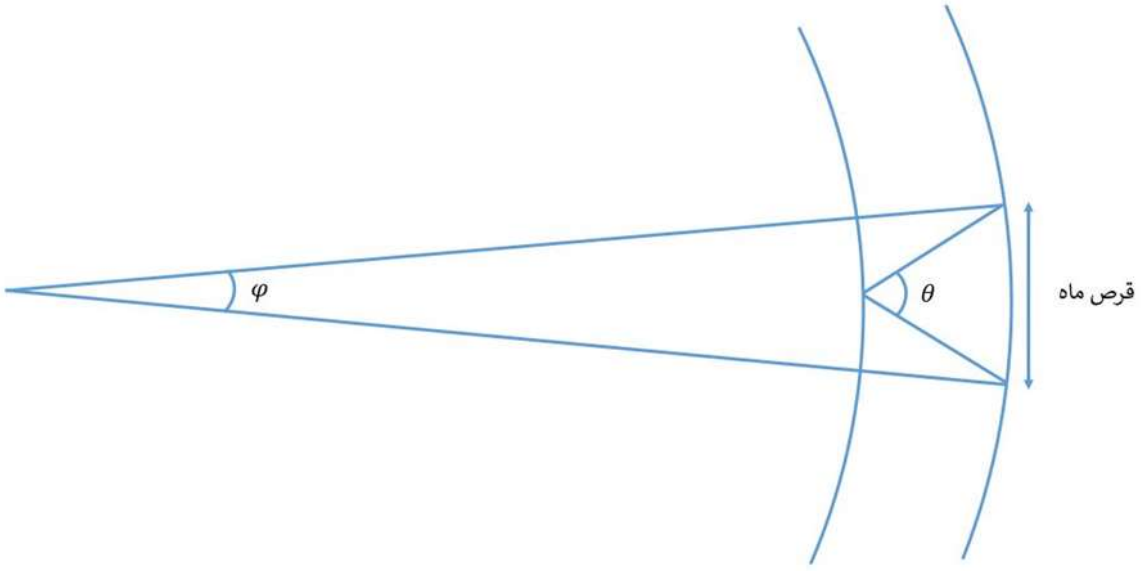
$$\rightarrow \varphi = \frac{432}{6800} * 32' = 2'$$

T	$360'$
t	$2'$

$$\rightarrow t = \frac{2'}{360'} * 5554\ s$$

$$t = 0.51\ s$$

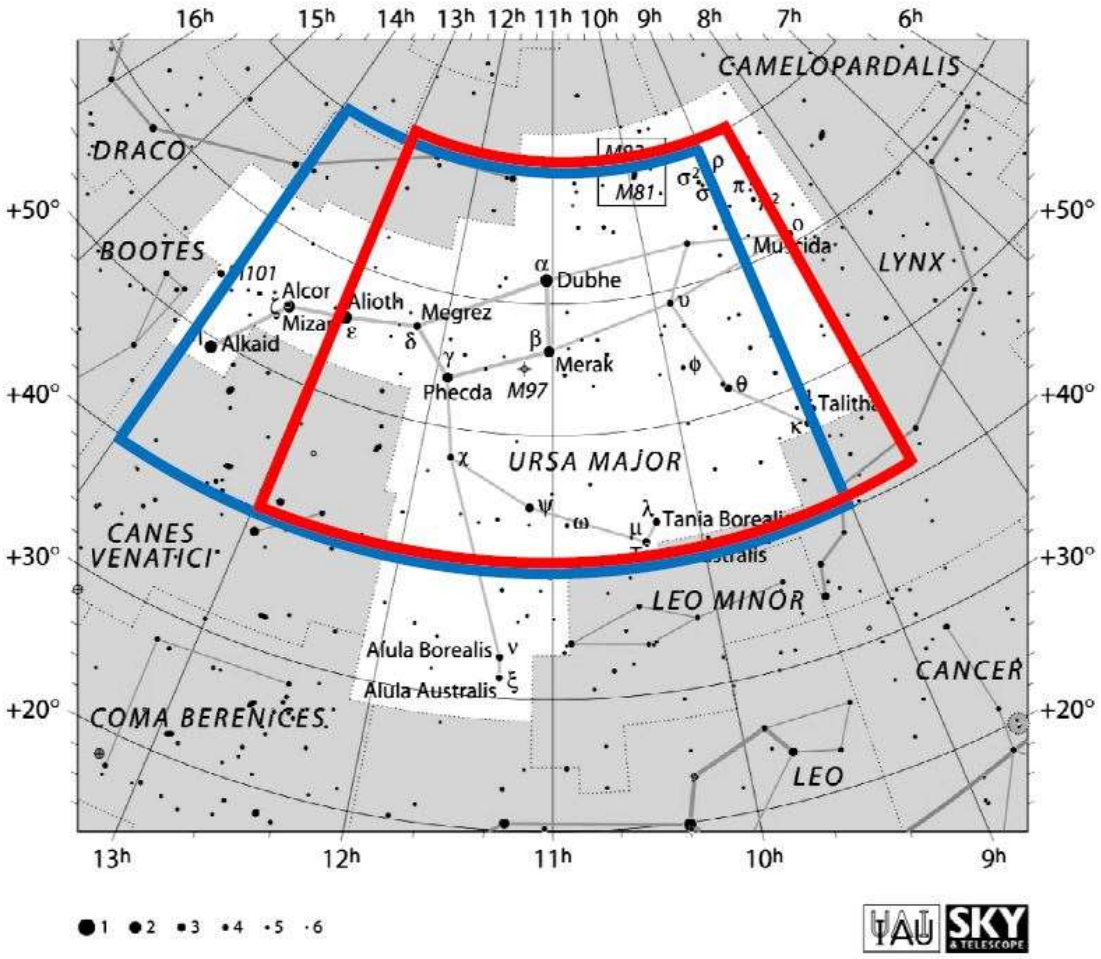
که زمان واقعی هم دقیقا 0.51 ثانیه بود .



سؤال پنجم : (120 نمره)

می‌خواهیم با استفاده از صورت فلکی دُب اکبر تخمین مناسبی از موارد خواسته شده بدست آوریم. محدوده این صورت فلکی که سومین صورت فلکی بزرگ در آسمانِ ماست، مطابق با قراردادهای اتحادیه بین‌المللی نجوم در تصویر زیر نشان داده شده است و ستارگان و اجرام اعماق آسمان تا قدر ظاهری 6+ در آن نمایانند. توزیع همه ستاره‌ها در آسمان را همگن و همسانگرد در نظر بگیرید.

همانگونه که می دانید این یکی از نقشه های اطلس آسمانِ *Pocket Sky Atlas* نوشته راجِر سینات است. در این صفحه محدوده صورت فلکی دُب اکبر همراه با همه ستارگان پرنورتر از قدر ظاهری 6+ و البته برخی از اجرام غیرستاره ای نمایش داده شده است.



الف) این صورت فلکی چند درصد از کل کره سماوی را به خود اختصاص داده است؟ (40 نمره)
(جزئیات محاسبات باید در پاسخنامه آورده شوند؛ دقت پاسخ 0.4 درصد)

ب) تعداد ستارگانِ روشن‌تر از قدر ظاهری 6+ را در کل آسمان چقدر بدست می‌آورید؟ (40 نمره)
(دقت پاسخ 500 ستاره)

ج) در محدوده این صورت فلکی تنها 13 ستاره نزدیکتر از 10 پارسک از ما قرار گرفته‌اند. مشخص کنید چگالی عددی ستارگان آسمان در اطراف خورشید تا فاصله 10 پارسک از ما برحسب $\frac{\text{ستاره}}{\text{pc}^3}$ چقدر است؟

(40 نمره) (دقت پاسخ $\frac{\text{ستاره}}{\text{pc}^3}$ 0.015)

پاسخ:

الف)

برای آنکه محدوده خطا را متوجه شویم، اگر دانش آموزی محدوده های آبی یا قرمز را در نظر گرفته باشد نمره کاملی خواهد گرفت؛ با اینحال مشخص است که محدوده آبی رنگ برای این تخمین مناسب تر است. (دقت شود هر محدوده ای که دقیق تر اتخاذ شده باشد، حتماً جوابی در این بازه خواهد داشت)

در نتیجه برای محدوده بُعدهای 9 تا 14 ساعت و محدوده مِیل های 70+ تا 40+ درجه داریم :

$$S_{UM} = \frac{2\pi(1-\cos 50°) - 2\pi(1-\cos 20°)}{4\pi} \times \frac{14h-9h}{24h} \times 100 \approx 3.09\%$$

همچنین محدوده بُعدهای 8/5 تا 13 ساعت و محدوده مِیل های 70+ تا 40+ درجه می شود :

$$S_{UM} = \frac{2\pi(1-\cos 50°) - 2\pi(1-\cos 20°)}{4\pi} \frac{13h-8.5h}{24h} \times 100 \approx \%2.78$$

که برای در نظر گرفتن بیشترین خطا، تا 0/4% اختلاف نمره کامل دارد.

ب)

اگر تعداد ستاره های موجود در این صورت فلکی در نقشه را شمارش کنیم 123تا هستند.

حال چنانچه با مساحت 3.1% از کره سماوی نسبت ببندیم، خواهیم داشت :

$$N = \frac{100}{3.1} \times 123 \cong 3970$$

که در محدوده خطای مورد قبول، تعداد ستاره ها ممکن است مقدار زیر باشند :

$$N = \frac{100}{2.78} \times 123 \cong 4420$$

که برای در نظر گرفتن بیشترین خطا، تا 500 ستاره اختلاف نمره کامل دارد.

ج)

می توان تعداد ستارگان کل آسمان تا فاصله 10 پارسک از خورشید را اینگونه تخمین زد :

$$N_{10pc} = \frac{100}{3.1} \times 13 \cong 420$$

$$\rightarrow n_{10pc} = \frac{N_{10pc}}{V_{10pc}} = \frac{420}{\frac{4}{3}\pi \times 10^3} \approx 0.1 \ \frac{\text{ستاره}}{pc^3}$$

و البته این مقدار نیز با خطای مجاز خواهد شد :

$$N_{10pc} = \frac{100}{2.78} \times 13 \cong 470$$

$$\rightarrow n_{10pc} = \frac{N_{10pc}}{V_{10pc}} = \frac{470}{\frac{4}{3}\pi \times 10^3} \approx 0.112 \ \frac{\text{ستاره}}{pc^3}$$

که برای در نظر گرفتن بیشترین خطا، تا $0.015 \ \frac{\text{ستاره}}{\text{pc}^3}$ اختلاف نمره کامل دارد.

سؤال ششم : (160 نمره)

می‌دانیم فشار در مرکز توده‌ای از گاز که در اثر گرانش خود منقبض شده است، از رابطه :

$$P_C = AM^{\frac{2}{3}}\rho_c^{\frac{4}{3}}$$

بدست می‌آید؛ که در آن ρ_c چگالی در مرکز ابر، M جرم کل توده گازی و A نیز مقداری ثابت تقریباً برابر با 2.96×10^{-11} است.

الف) واحد ثابت A برحسب یکاهای SI چیست؟ (30 نمره)

ابری از گاز هیدروژن را در نظر بگیرید که در حال انقباض و تبدیل شدن به یک ستاره است. در اثر انقباض دما و چگالی در مرکز ابر افزایش می‌یابد و هیدروژن‌ها یونیزه می‌شوند. با افزایش چگالی در مرکز ابر الکترون‌ها به حالت واگنی (تبهگنی) می‌رسند. حالت واگنی حالتی کوانتومی است که در آن معادله حالت الکترون‌ها از قانون گاز کامل تبعیت نمی کند. در این حالت فشار الکترون‌ها برابر است با

$$P_e = Bn_e^{\frac{5}{3}}$$

که در آن B عددی ثابت و n_e چگالی عددی الکترون‌هاست.

ب) واحد ثابت B برحسب یکاهای SI چیست؟ (30 نمره)

فشار کل گاز در مرکز ابر، مجموع فشار الکترون‌ها و پروتون‌ها خواهد بود :

$$P_c = Bn_e^{\frac{5}{3}} + n_p kT_c$$

که در آن n_p چگالی عددی پروتون‌ها و T_c دما در مرکز ستاره است.

ج) اگر حداقل دمای لازم برای شروع واکنش‌های هسته‌ای در مرکز ستاره T_n باشد، حداقل جرم یک توده ابر برای اینکه بتواند واکنش‌های هسته‌ای را در مرکز خود شروع کند، چقدر خواهد بود؟ (100 نمره)

پاسخ:

الف) می خواهیم واحد A را در دستگاه آحاد SI بدست آوریم ، کافی است بعد A را بدست آوریم.
فشار برابر است با نیرو بر واحد سطح بنابراین برای بعد فشار داریم

$$P = \frac{F}{S} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = \frac{MT^{-2}}{L} = \frac{M}{LT^2}$$

$$\frac{M}{LT^2} = AM^{2/3}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{4/3} = \frac{AM^2}{L^4}$$

$$A = \frac{L^3}{MT^2}$$

بنابراین واحد A در دستگاه SI برابر است با $m^3 kg^{-1} s^{-2}$

ب) در این قسمت نیز مثل قسمت قبل

$$\frac{M}{LT^2} = B\left(\frac{1}{L^3}\right)^{5/3} = \frac{B}{L^5}$$

$$B = \frac{L^4 M}{T^2}$$

بنابراین واحد B در دستگاه SI برابر است با $m^4 \text{kg}\, s^{-2}$

ج) با توجه به متن، فشار گاز هیدروژن باید برابر فشار لازم در مرکز ستاره باشد

$$AM^{2/3}{\rho_c}^{4/3} = B{n_e}^{5/3} + n_p k T_c$$

هیدروژن ها هم یونیزه هستند بنابراین چگالی عددی الکترون ها و پروتون ها برابر است.

$$n_e = n_p = \frac{\rho_c}{m_H}$$

$$AM^{2/3}{\rho_c}^{4/3} = B\left(\frac{\rho_c}{m_H}\right)^{5/3} + \frac{\rho_c}{m_H}\, kT_c$$

$$AM^{\frac{2}{3}}\rho_c^{\frac{1}{3}} = B\frac{\rho_c^{\frac{2}{3}}}{m_H^{\frac{5}{3}}} + \frac{k}{m_H} T_c$$

$$T_c = \frac{AM^{2/3} m_H}{k}{\rho_c}^{1/3} - \frac{B}{{m_H}^{2/3} k}\,{\rho_c}^{2/3}$$

$$= \alpha{\rho_c}^{1/3} - \beta{\rho_c}^{2/3}$$

$$\alpha = \frac{AM^{2/3} m_H}{k} \qquad \beta = \frac{B}{{m_H}^{2/3} k}$$

با افزایش چگالی دما افزایش می یابد اما به سادگی می توان دید که این افزایش یک حداکثر دارد

$$\frac{dT_c}{d\rho_c} = \frac{1}{3}\alpha {\rho_c}^{-2/3} - \frac{2}{3}\beta {\rho_c}^{-1/3} = 0$$

$$\alpha {\rho_c}^{-2/3} = 2\beta {\rho_c}^{-1/3} \Rightarrow {\rho_c}^{-1/3} = \frac{2\beta}{\alpha}$$

$$\rho_c = (\frac{\alpha}{2\beta})^3$$

$$\Rightarrow T_c^{max} = \alpha\frac{\alpha}{2\beta} - \beta\frac{\alpha^2}{4\beta^2}$$

$$T_c^{max} = \frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta} = \frac{\alpha^2}{4\beta}$$

$$T_c^{max} = \frac{A^2 M^{\frac{4}{3}} m_H^2}{k^2} \quad \frac{m_H^{\frac{2}{3}}}{4B} k = \frac{A^2}{4Bk} m_H^{\frac{8}{3}} M^{\frac{4}{3}} =$$

$$M = (\frac{4BkT_c^{max}}{A^2})^{3/4}(\frac{1}{m_H})^2$$

هر چه این جرم کمتر باشد T_c^{max} کمتر خواهد بود. بنابراین حداقل جرم برای رسیدن دما به T_n (دمای لازم برای شروع واکنش های هسته ای) برابر است با:

$$M_{min} = (\frac{4BkT_n}{A^2})^{3/4}(\frac{1}{m_H})^2$$

سؤال هفتم : (120 نمره)

وقتی جسمی از ما دور می‌شود نور دریافتی ما از آن جسم قرمزتر شده و اصطلاحاً می‌گوییم انتقال به سرخ رخ داده است. انتقال به سرخ را با کمیت z نشان می‌دهیم؛ به طوری که :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$$

است و در آن λ_o طول موج دریافتی (رصد شده) و λ_e طول موج تابش شده است.

ادوین هابل با رصد کهکشان‌های متفاوت نشان داد که برای کهکشان‌های دوردست رابطه‌ای به صورت $v = H_0 d$ برقرار است که در آن $H_0 = 69\ kms^{-1}Mpc^{-1}$ ثابت هابل، d فاصله کهکشان از ما و v سرعت کهکشان از دید ناظر زمینی است. با افزایش فاصله، سرعت دورشدن آن‌ها از ما بیشتر می‌شود. به این معنی که ابعاد کیهان در حال انبساط یا کش آمدن است. پس طول موج امواج نیز قرمزتر دیده می‌شوند که به این پدیده قرمزگرایی کیهانی می‌گوییم.

الف) اندازه‌های کیهانی در زمان t را با $d(t) = R(t)d(t_0)$ نشان می‌دهیم؛ که در آن $R(t)$ فاکتور مقیاس و $d(t_0) = d_0$ ابعاد کیهان در حال حاضر است. نشان دهید $R = \frac{1}{(1+z)}$. (40 نمره)

ب) تابعیت چگالی جرمی در عالم برای عالمی که در آن تمامی ذرات نسبت به سرعت نور خیلی کند حرکت می کنند (غیر نسبیتی هستند) بر حسب z چگونه است؟ (20 نمره)

ج) به چگالی که در آن مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی (انرژی کل) اجرام کیهانی صفر است چگالی بحرانی کیهانی گفته می‌شود. انرژی کل اجرام نجومی را حساب کنید و رابطه ای برای چگالی بحرانی به دست آورید. (40 نمره)

د) مقدار عددی چگالی بحرانی برحسب کیلوگرم بر مترمکعب چقدر است؟ (10 نمره)

هـ) اگر این چگالی را بخواهیم در پارسک مکعب بنویسیم، چند جرم خورشید بر پارسک مکعب خواهد بود؟ (10 نمره)

پاسخ:

الف)

$$\frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} = Z \rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{D_0}{D(t)} = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{1}{R} = 1 + Z$$

ب)

$$\rho_0 D_0^3 = \rho(t) D^3(t) = \rho(t) R^3(t) D_0^3$$

$$\rho(t) = \rho_0 (1+Z)^3$$

ج)

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v^2 = H_0^2 D_0^2 = \frac{2GM}{D_0} = \frac{2G}{D_0} \rho_c \frac{4}{3} \pi D_0^3$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \Rightarrow \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

د)

$$\rho_c = 9.47 \times 10^{-27} \, kg/m^3$$

ه)

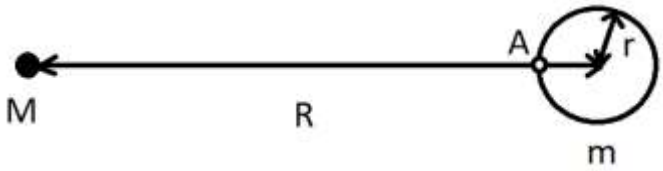
$$\rho_c = 0.15 \times 10^{-6} \, M_\odot / \rho_c^{\,3}$$

سؤال هشتم: (130 نمره)

هنگامی که یک جسم غیر نقطه‌ای در یک میدان گرانشی غیریکنواخت قرار می‌گیرد، به اجزای متفاوت آن شتاب‌های گرانشی متفاوتی وارد می‌شود و در نتیجه دچار تغییر شکل خواهد شد که به این پدیده کِشند گفته می‌شود. در مرکز بیشتر کهکشان‌ها از جمله کهکشان راه شیری، یک اَبَرسیاهچاله قرار دارد که جرمی از مرتبه چند میلیون جرم خورشید دارد. در نزدیکی ابرسیاهچاله یک محدوده ستاره‌ای بسیار چگال وجود دارد که به آن (خوشه ستاره‌ای هسته‌ای) می‌گوییم. برای راه شیری، این خوشه تقریباً شعاعی نزدیک به یک پارسک دارد و شامل حدود 10 میلیون ستاره است که غالباً پیر هستند.

در چنین محیط چگالی، برهم‌کنش‌های فراوانی بین ستاره‌ها و نیز بین ابرسیاهچاله و ستاره‌ها رخ می‌دهد. یکی از این برهم‌کنش‌ها، رویداد گسیختگیِ کشندی است که طی آن، یک ستاره که بیش از حد به ابرسیاهچاله نزدیک شده است، به دلیل نیروی کشندی ابرسیاهچاله، دچار گسیختگی می‌شود و تمام یا بخشی از جرم آن به داخل ابرسیاهچاله سقوط می‌کند.

فرض کنید که ابرسیاهچاله دارای جرم M است و ستاره‌ای به جرم m و شعاع r در فاصله R (مطابق شکل) از آن قرار گرفته است. این ستاره دورانی به دور خودش ندارد و همچنین r در مقایسه با R بسیار کوچک است. می‌خواهیم حساب کنیم که تحت چه شرایطی، بخشی از ستاره در اثر نیروی کشندی از سطح آن جدا می‌شود. مطابق شکل نزدیک‌ترین نقطه ستاره به ابرسیاهچاله A و فاصله این نقطه تا ابرسیاهچاله برابر $R - r$ است.



الف) شتاب گرانشی از طرف ابرسیاهچاله به نقطه A را محاسبه کنید و سپس با کم کردن شتاب مرکز جرم ستاره (محاسبه شتاب نسبی)، شتاب کشندی ناشی از ابرسیاهچاله را به دست آورید. (40 نمره)

می‌توانید از رابطه تقریبی بسط تیلور به صورت زیر استفاده کنید :

$$f(x) = f(x_0 = 0) + f'(x_0 = 0)x$$

ب) اکنون با مقایسه این شتاب با شتاب گرانشی ناشی از خود ستاره به اجزای سطح آن، حساب کنید که فاصله R حداقل باید چقدر باشد تا گسیختگی گرانشی رخ دهد؟ (30 نمره)

ستاره $S2$ که نزدیک‌ترین ستاره راه شیری به ابرسیاهچاله مرکزی است و جرم آن 15 برابر جرم خورشید است، در مداری بیضوی به دور آن می‌چرخد. جرم ابرسیاهچاله کهکشان ما 4 میلیون برابر جرم

خورشید است. نیم قطر بزرگ مدار $S2$ برابر $970\ AU$ و خروج از مرکز مدار آن برابر با 0.88 است. از آنجا که این ستاره نسبتاً جوان است، احتمالاً در مراحل بعدی تحولش دچار انبساط خواهد شد.

ج) شعاع این ستاره باید به چه مقدار (بر حسب شعاع خورشید) برسد تا فرآیند گسیختگی کشندی آغاز شود؟ (30 نمره)

شعاع شوارزشیلد فاصله‌ای از مرکز یک سیاهچاله است، که داخل آن هر اتفاق بیفتد اطلاعی به بیرون منتقل نمی‌شود. این شعاع برابر $\frac{2\,G\,M}{c^2}$ است که در آن M جرم سیاهچاله، G ثابت جهانی گرانش و c سرعت نور است. فرض کنید یک ستاره نوترونی به جرم 1.2 جرم خورشید و شعاع 10 کیلومتر، مستقیم به داخل ابرسیاهچاله راه شیری سقوط می‌کند. در تمام فرآیند سقوط، گرانش از رابطه نیوتون پیروی می‌کند و از اثرات نسبیت عام نیز صرف نظر کنید.

د) محاسبه کنید گسیختگی گرانشی برای این ستاره نوترونی در چه فاصله‌ای از مرکز سیاهچاله رخ می‌دهد. سپس با مقایسه این فاصله با شعاع شوارزشیلد ابرسیاهچاله، بیان کنید آیا یک رصدگر می‌تواند این پدیده را مشاهده کند یا خیر؟ (30 نمره)

پاسخ:

الف)

$$A: g_{SMBH} = \frac{-GM}{(R-r)^2} = \frac{-GM}{R^2}\frac{1}{(1-\frac{r}{R})^2}\hat{r}$$

بسط تیلور: $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+\dots$

$$\rightarrow g_{SMBH} = -r\frac{GM}{R^2} - \hat{r}\frac{GM}{R^2}\times\frac{2r}{R}$$

نیروی کشندی:

$$(-\frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{R^2}\times\frac{2r}{R}) - (-\frac{GM}{R^2}) = -\frac{GM}{R^2}\times\frac{2r}{R}$$

ب)

$$\left|\frac{-GM}{R^2}\times\frac{2r}{R}\right| \geq \left|\frac{GM}{r^2}\right|$$

$$\frac{r^3}{m} \geq \frac{R^3}{2M} \longrightarrow r_{dis} \gg \sqrt[3]{\frac{m}{2M}} \times R$$

ج)

$$R = a(1-e) \rightarrow r_{dis} = a(1-e)\sqrt[3]{\frac{m}{2M}}$$

$$a = 970\,AU, \qquad e = 0.88\,m = 15M_{\odot}, \qquad M = 4 \times 10^{6} M_{\odot}$$

$$r_{dis}/r_{\odot} = 309.3$$

د)

$$\begin{cases} R_{dis} = \sqrt[3]{\frac{2M}{m}} r = 1.88 \times 10^{6}\ m \\ R_{sch} = \frac{2GM}{c^2} = 1.17 \times 10^{10}\ m \end{cases} \rightarrow R_{sch} > R_{dis}$$

پس دیده نمی‌شود.